Algèbre de BOOLE

Introduction

Plan

- Définition
- Introduction
- Fonctions logiques (ET, OU, NON)
- Règles de l'Algèbre de Boole
- Théorème de De Morgan
- Simplification des fonctions logiques

Définition

- Définit en 1847 par Georges Boole (1815-1864), physicien Anglais
  - Algèbre applicable au raisonnement logique qui traite des fonctions à variables binaires (deux valeurs).
  - Ne s'applique pas aux systèmes à plus de deux états d'équilibre.
  - Permet d'étudier les circuits logiques (un système logique sert à modifier des signaux).

Introduction

- L 'algèbre de Boole permet de manipuler des valeurs logiques
  - Une valeur logique n'a que deux états possibles :
    →Vraie(1) ou Fausse(0).
  - Plusieurs valeurs logiques peuvent être combinées pour donner un résultat qui est lui aussi une valeur logique
- Exemple :
  - arrêt marche
  - ouvert fermé
  - enclenché déclenché
  - avant arrière
  - vrai faux
  - conduction blocage

Introduction

- La manipulation des valeurs logiques repose sur 3 fonctions (ou opérateurs) logiques de base:
  - ET, OU, NON :
    - A et B ; A ou B ; non A
- La variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 valeurs qui sont repérées habituellement 0 ou 1.
  → Se note par une lettre comme en algèbre.
- Toutes les fonctions logiques sont formées des 3 fonctions de base

Fonction logique

- Résultat de la combinaison (logique combinatoire) d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations logique de base :
  - la valeur résultante (**O** ou **1**) de cette fonction dépend de la valeur des variables logiques.
  - → Une fonction logique possède une ou des **variables logiques d'entrée** et une **variable logique de sortie**. Cette fonction logique se note par une lettre comme en algèbre.
    - Exemple F = (A et B) ou C et (non D)

Fonctions Logiques

- Les fonctions logiques peuvent être représentées par des **Tables de vérités**
- La table de vérité permet la connaissance de la sortie (d 'un circuit logique) en fonction des diverses combinaisons des valeurs des entrées
  - **Le nombre de colonnes est le nombre total d'entrées et de sorties**
  - **Le nombre de lignes est 2^N sachant que "N" est le nombre d'entrées,**
- **Exemple:**
  Une fonction de 3 entrées et 1 sortie se représente par une table de 4 colonnes et 8 lignes

Table de vérité (exemples)

3 entrées et 1 sortie
4 colonnes et 8 lignes

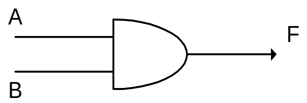
A	B	C	Résultat
0	0	0	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$
0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	$\bar{A}BC$
1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	$AB\bar{C}$
1	1	1	ABC

Fonction logique ET (AND)

- Représentation:
  - F = A * B ou A • B ou AB

Table de vérité

Entrée		Sortie
B	A	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



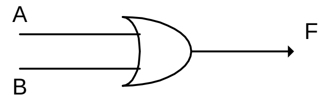
Symbole graphique

Fonction logique OU (OR)

- Représentation:
  - F = A + B

Table de vérité

Entrée		Sortie
B	A	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



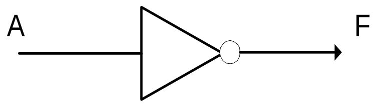
Symbole graphique

Fonction logique NON (NOT)

- Représentation:
  - F = $\overline{A}$

Table de vérité

Entrée	Sortie
A	F
0	1
1	0



Symbole graphique

Règles (ou propriétés) de l'algèbre de Boole

Fermeture	Si A et B sont des variables booléennes, alors A+B, AB sont aussi des variables booléennes
Commutativité	$A+B=B+A$ $A\bullet B=B\bullet A$
Associativité	$A+(B+C)=(A+B)+C$ $A\bullet(B\bullet C)=(A\bullet B)\bullet C$
Distributivité	ET / OU $A(B+C)=AB+AC$ OU / ET $A+(BC)=(A+B)(A+C)$
Idempotence	$A+A=A$ $A\bullet A=A$
Complémentarité	$A+\overline{A}=1$ $A\bullet\overline{A}=0$
Identités remarquables	$1+A=1$ $1\bullet A=A$ $0+A=A$ $0\bullet A=0$
Distributivité interne	$A+(B+C)=(A+B)+(A+C)$ $A\bullet(B\bullet C)=(A\bullet B)\bullet(A\bullet C)$

Théorème de De Morgan

- $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$

Vérification :

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Equivalent

- $\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$

Vérification :

A	B	$\overline{A.B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Equivalent

Simplification des fonctions logiques

- **Pourquoi ?**
  - Utiliser le moins de composants possibles
  - Simplifier au maximum le schéma de câblage

Il faut donc trouver la forme minimale de l 'expression logique considérée

- **Deux méthodes**
  - Algébrique (en utilisant des propriétés et des théorèmes)
  - Graphique (tableaux de Karnaught; ...)

Exemple

$$S = A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\left(\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}}\right)$$

- **Transformation**

$$S = A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot(A+C)$$
$$= A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot A + A\cdot\overline{B}\cdot C$$
$$= A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B} + A\cdot\overline{B}\cdot C$$

- **Variables communes**

$$S = A\cdot\overline{B} + A\cdot C\cdot\left(B+\overline{B}\right)$$
$$S = A\cdot\overline{B} + A\cdot C$$
$$\boxed{S = A\cdot\left(\overline{B}+C\right)}$$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$AB + \overline{A}B$$

$$(A+B)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$$

$$\overline{\overline{A}B + \overline{\overline{A} + B}}$$

Exercice 2

Prouver les théorèmes d 'absorption :

$$A.(A+B)=A$$

$$A+\overline{A}.B=A+B$$

$$A.(\overline{A}+B)=A.B$$

$$A.B+\overline{A}.C+B.C=A.B+\overline{A}.C$$

Exercice

1. Montrer comment l'opérateur **ET** peut être obtenu à partir des opérateurs **OU** et **NON**.
   De même pour l'opérateur **OU** avec les opérateurs **ET** et **NON**.
2. On note respectivement les opérateurs **OU**, **ET**, **XOR** et **NON** par +, ·, ⊕ et $\overline{}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ et que $A \oplus B = (A+B) \cdot (\overline{A}+\overline{B})$
3. Montrer que $A+(\overline{A} \cdot B) = A+B$ et que $A \cdot (\overline{A}+B) = A \cdot B$
4. Déterminer le complément de l'expression $A+\overline{B} \cdot C$
5. Ecrire l'expression $\overline{A \oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **OU**, **ET** et **NON**

Table de Karnaugh

- Représentation de la table de vérité sous forme graphique.
- Nombre de cases = nombre de lignes de la table de vérité.
  - Multiple de 2^n (1, 2, 4, 8, 16, ...)
    - n = Nombre d 'entrées

Table de Karnaugh

- Avec n = 2:
  - Entrées B et A
  - 4 cases

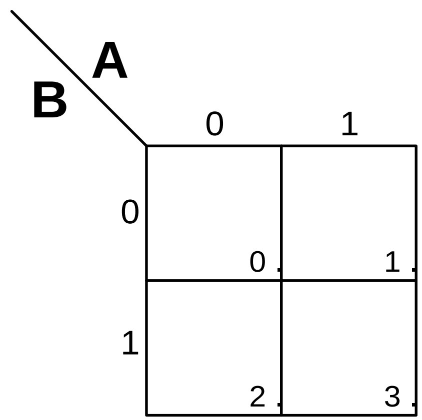


Table de Karnaugh

- Avec n = 3:
  - Entrées C, B et A
  - 8 cases

C \ BA	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Table de Karnaugh

- Avec n = 4:
  - Entrées D, C, B et A
  - 16 cases

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Exemple (Karnaugh)

Entrées			Sortie
C	**B**	**A**	**S**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

TABLE DE VÉRITÉ

C \ BA	00	01	11	10
0	**0** (0)	**0** (1)	**1** (3)	**1** (2)
1	**0** (4)	**1** (5)	**0** (7)	**1** (6)

TABLE DE KARNAUGH

Table de Karnaugh

- À partir de la table, on simplifie en groupant les 1 adjacents.
- Les 1 adjacents sont mis en évidence par l'ordre utilisé pour former la table
- La taille d'un groupe est un multiple de 2^k (1, 2, 4, 8, ...).
- Le groupe est soit rectangulaire ou carré.

Table de Karnaugh

- Former les plus gros groupes possibles.
  - Termes plus simples.
- Un 1 peut faire partie de plusieurs groupes.

Exemple (Karnaugh)

- Les 1 des bords extrêmes sont adjacents.
  - La table se referme sur elle même.

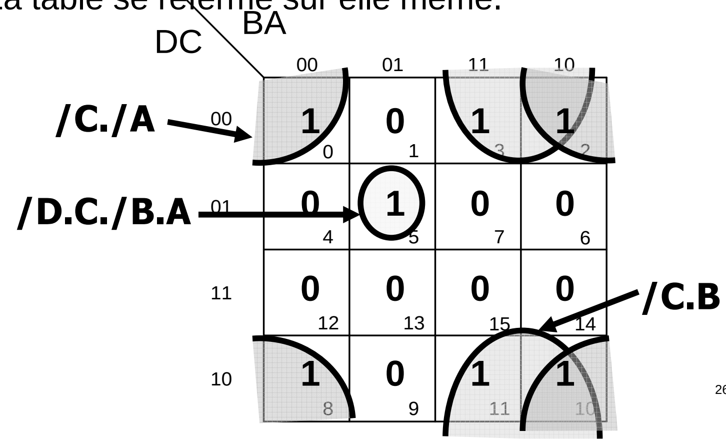


Table de Karnaugh

- À partir de la table, on simplifie en groupant les 1 adjacents.
- Les 1 adjacents sont mis en évidence par l'ordre utilisé pour former la table
- La taille d'un groupe est un multiple de 2^k (1, 2, 4, 8, ...).
- Le groupe est soit rectangulaire ou carré.

Exercices

1. Simplifier la fonction :

$$f = \bar{c}\bar{d}b + cab + \bar{c}dab + c\bar{d}\,\bar{a}b + ca\bar{b}$$

   Calculer $\overline{f}$

2. Soit $f = da + c.(d\bar{b} + \bar{a}b) + \bar{d}(c\bar{b} + ab) + \bar{c}\bar{d}a$

   Calculer $\overline{f}$