CHAPITRE III: Séries temporelles: Analyse des Indices

L'activité économique des pays est souvent mesurée à partir d'indices très divers. Ainsi, par exemple, l'indice des prix à la consommation sert de référence à la fixation du SMIC, les hausses des loyers sont indexées sur l'indice de référence des loyers, etc. De nombreuses organisations, comme les organisations syndicales par exemple, calculent-elles aussi leur propre indice, qui différent très souvent des premiers.

I. Indices simples

On appelle indice le nombre mesurant l'évolution de la grandeur *X* de la date de référence 0 à la date courante *t*.

On a $I_{N/N+1} = \dfrac{0.94}{1.05} = 0{,}89523$ $I_{t/0} = \dfrac{X_t}{X_0}$ si X_t est la valeur prise par X à la date t et X_0 la valeur prise par la grandeur X à la date 0. Un indice est donc un nombre sans unité. Cette relation équivaut à $X_t = I_{t/0} \times X_0$. L'indice $I_{t/0}$ est donc un cœfficient multiplicateur : c'est le nombre qui, multiplié à X_0 (valeur prise par la grandeur *X* à la date 0 donne X_t (valeur prise par la grandeur *X* à la date *t*).

La base de l'indice correspond à la valeur de la grandeur à la date de référence 0.

Si l'indice est exprimé en base 1, il signifie que pour une valeur de la grandeur égale à 1 à la date de référence 0, la valeur de la grandeur égale $I_{t/0}$ à la date *t*.

Si l'indice est exprimé en base 100, il signifie que pour une valeur de la grandeur égale à 100 à la date de référence 0, la valeur de la grandeur égale $I_{t/0}$ à la date *t*.

Exemple 1

1. Le 3 juin N, le prix d'une baguette était égal à 0,94 €. Aujourd'hui, le 3 juin N+1, le prix de cette même baguette est égal à 1,05 €. Quel est l'indice mesurant l'évolution du prix de la baguette entre ces deux dates ?

$$I_{N+1/N} = \frac{1.05}{0.94} = 1{,}117$$

Si la base de l'indice est égale à 1, l'indice mesurant l'évolution du prix de la baguette est égal à 1,117 ; si la base de l'indice est égale à 100, l'indice mesurant l'évolution du prix de la baguette est égal à 111,7. Cela signifie que si la baguette avait coûté 1 € le 3 juin N, elle coûterait aujourd'hui 1,117 € ou encore que si elle avait coûté 100 € le 3 juin N, elle coûterait aujourd'hui 111,7 €, étant donné le pourcentage d'augmentation.

2. Le 3 juin N, le prix d'un croissant est égal à 1,10 €. Aujourd'hui, le 3 juin N+1, le prix du croissant est égal à 1 €. Quel est l'indice mesurant l'évolution du prix du croissant entre ces deux dates ?

$$I_{N+1/N} = \frac{1}{1.1} = 0.909$$

Si la base de l'indice est égale à 1, l'indice mesurant l'évolution du prix du croissant est égal à 0,909 ; si la base de l'indice est égale à 100, l'indice mesurant l'évolution du prix du croissant est égal à 90,9.

Cela signifie que si le croissant avait coûté 1 € le 3 juin N, il coûterait aujourd'hui 0,909 € ou que s'il avait coûté 100 € le 3 juin N, il coûterait aujourd'hui 90,90 € étant donné le pourcentage de diminution.

Remarque : un indice est un cœfficient multiplicateur, il ne faut donc jamais additionner ou soustraire des indices : on ne peut que les multiplier ou les diviser. Lorsqu'une grandeur subit des augmentations ou diminutions successives, il suffit de multiplier les indices pour obtenir le pourcentage d'évolution global.

Indices et pourcentages d'augmentation et de diminution

Pour un pourcentage de variation égal à x de la date 0 à la date t, l'indice est $I_{t/0} = 1 + x$.

S'il s'agit d'une augmentation, x est positif et l'indice est plus grand que 1, s'il s'agit d'une diminution, x est négatif et l'indice est plus petit que 1.

De la même façon, le pourcentage de variation de la grandeur entre les dates 0 et *t à* partir de l'indice $I_{t/0}$ est donné par le calcul : $x = (I_{t/0} - 1) \times 100$

Exemple 2

1. Si une grandeur G est augmentée de 3 % : x = 3 % = 0,03. L'indice d'évolution est : (1+ x) = 1 + 0,03.
   Si X_0 est la valeur de la grandeur à la date initiale 0, la valeur X_t de la grandeur X après augmentation de 3 % est égale à : $X_t = X_0 \times (1 + x) = X_0 \times (1 + 0{,}03)$.
2. Si une grandeur G est diminuée de 5 % : x = –5 % = –0,05. L'indice d'évolution est : (1 + x) = 1 – 0,05.
   La valeur Xt de la grandeur X après diminution de 5 % est égale à : Xt = X0 × (1 + x) = $X_0 \times (1 - 0{,}05)$.

Exemple : si on reprend l'exemple 1

Le prix de la baguette a varié de (1,117 – 1) × 100 = 0,117. Le prix a donc augmenté de 11,7 % entre le 3 juin N et le 3 juin N+1.

Le prix du croissant a varié de (0,909 – 1) × 100 = –0,091. Le prix a donc baissé de 9,1 % entre le 3 juin N et le 3 juin N+1.

Propriétés des indices

- *Réversibilité* : $I_{t/0} = \frac{1}{I_{0/t}}$

- $circularité : I_{t/0} = I_{t/f} * I_{f/0}$

Reprenons l'exemple 1

Le 3 juin N, le prix d'une baguette est égal à 0,94 €. Il est égal à 1,05 € le 3 juin N+1, puis à 1,10 € le 3 juin N+2. Vérifier les deux propriétés sur cet exemple.

1. **<u>Réversibilité :</u>**

$$I_{N+1/N} = \frac{1.05}{0.94} = 1{,}11702$$

$$I_{N/N+1} = \frac{0.94}{1.05} = 0{,}89523$$

On peut vérifier que $I_{N+1/N} = \frac{1}{I_{N/N+1}} : 1.11702 = \frac{1}{0.89523}$

2. **<u>Circularité:</u>**

$$I_{N+1/N} = \frac{1.05}{0.94} = 1.11702 \;;\; I_{N+2/N+1} = \frac{1.10}{1.05} = 1.04762 \;;\; I_{N+2/N} = \frac{1.10}{0.94} = 1.17021$$

L'augmentation de 11,702 % suivie d'une augmentation de 4,762 % est équivalente à une seule augmentation de 17,021 %.

<u>Exemple 3</u>

Le personnel chargé de la promotion et des ventes d'un nouveau rayon dans un supermarché serait rémunéré avec un fixe mensuel de 1 200 € et une prime variable.

La prime dépendrait d'un indice calculé selon le montant des ventes et le type de produits vendus, l'indice étant recalculé chaque mois. Cette prime s'élèverait à 500 € pour un indice égal à 1.

1. Quel serait le montant de la rémunération mensuelle :
   - pour un indice égal à 0,9 ?
   - pour un indice égal à 1,1 ?
   - Si l'indice baisse de 3 %, après avoir été égal à 1,2 ?
2. Quel serait le montant de l'indice pour une rémunération de 1 500 € ?

<u>Corrigé</u>

1. Montant de la prime pour un indice égal à 0,9 : 500 × 0,9 = 450 €. Le montant de la rémunération est alors : 1 200 + 450 = 1 650 €.

- Montant de la prime pour un indice égal à 1,1 : 500 × 1,1 = 550 €. Le montant de la rémunération est alors : 1 200 + 550 = 1 750 €.

- Valeur de l'indice pour une baisse de 3 %, après avoir été égal à 1,2 :
  I = 1,2 × 0,97 = 1,164. Montant de la prime montant de la prime pour un indice égal à 1,164 : 500 × 1,164 = 582 €. Le montant de la rémunération est alors : 1200+582=1782€.

2. Si la rémunération égale 1 500 €, la prime est alors égale à 300 €. La prime égale 500 € pour un indice égal à 1.

   Pour une prime égale à 300 €, l'indice est alors égal à $I = \dfrac{300}{500} = 0.6$.

II. Indices synthétiques

Si la grandeur X est constituée de plusieurs éléments X^j (on dit que X est une grandeur complexe), on peut alors calculer pour chaque constituant X^j un indice élémentaire $I^j_{t/0}$ Si on veut synthétiser tous ces indices en un seul, c'est-à-dire chercher un indicateur unique qui permette la synthèse de ces évolutions diverses, on effectue une moyenne pondérée d'indices. On obtient un indice appelé indice synthétique.

Les cœfficients de pondération seront notés a_t^j. Ils mesurent l'importance relative du constituant X^j dans la grandeur X est à la date t.

Selon le type de moyenne choisie, on définit plusieurs indices synthétiques.

1. ***Indice de Laspeyres***

C'est une moyenne arithmétique d'indices simples, pondérés par les cœfficients de pondération a_0^j de la date de référence.

Les *cœfficients de pondération* sont donc fixes : ce sont ceux de la période de base, de référence. On considère que la composition de la grandeur complexe ne varie pas, elle reste la même qu'à la date de référence.

On a : $L_{t/0} = \sum (a_0^i \times I^i_{t/0}) = a_0^1 \times I^1_{t/0} + a_0^2 \times I^2_{t/0} + ... + a_0^n \times I^n_{t/0}$

a) Cas particulier de l'indice de Laspeyres des prix

On veut calculer une moyenne des indices mesurant variations des prix de différents produits, c'est-à-dire la moyenne de plusieurs indices des prix.

Les cœfficients de pondération sont constitués de la part dans la dépense totale de la dépense consacrée aux différents articles pendant la période de base.

Remarque : dans le cas d'un indice des prix à la consommation, ces cœfficients de pondération sont appelés sont appelés cœfficients budgétaires.

Si on appelle P_t^i le prix du produit i à la date t et la quantité q_t^i achetée du produit i à la date t, alors les indices des prix sont égaux aux rapports $I^i_{t/0} = \dfrac{p_t^i}{p_0^i}$.

Les coefficients de pondération sont $a_0^i = \dfrac{q_0^i \times p_0^i}{\sum q_0^i \times p_0^i}$.

On a donc : $L(p) = \sum (a_0^i \times \dfrac{p_t^i}{p_0^i}) = a_0^1 \times \dfrac{p_t^1}{p_0^1} + a_0^2 \times \dfrac{p_t^2}{p_0^2} + ... + a_0^n \times \dfrac{p_t^n}{p_0^n}$

Dans ce cas la formule générale se simplifie, on a :

$$L(p) = \frac{\sum q_0^i \times p_t^i}{\sum q_0^i \times p_0^i} = \frac{q_0^1 \times p_t^1 + q_0^2 \times p_t^2 + ... + q_0^n \times p_t^n}{q_0^1 \times p_t^1 + q_0^2 \times p_t^2 + ... + q_0^n \times p_t^n}$$

Il faut donc diviser la valeur aujourd'hui (avec les prix d'aujourd'hui) du « panier » d'hier (avec les quantités achetées hier) par la valeur hier du panier d'hier.

<u>Reprenons l'exemple1</u>

On veut étudier l'évolution du prix des produits de boulangerie à partir de l'étude des prix de deux produits, la baguette et le croissant.

On dispose des informations suivantes :

Boulangerie	Hier : date 0		Aujourd'hui : date t	
	Prix p_0 (en €)	Quantité q_0 (en kg)	Prix p_t (en €)	Quantité q_t (en kg)
Baguette	0,94	118	1,05	140
Croissant	1,1	67	1	80

a) Déterminer l'indice de laspeyres des prix en utilisant la formule générale.
b) Retrouver la valeur de cet indice à partir de la formule simplifiée.

Corrigé

a) Calcul de l'indice à partir de la formule générale : moyenne arithmétique pondérée d'indices simples des prix.

Boulangerie	Date0		Date t		$p_0 \times q_0$	a_0	$I_{t/0}$	$a_0 \times I_{t/0}$
	p_0	q_0	p_t	q_t				
Baguette	0.94	118	1.05	140	110.92	0.6008	1.1170	0.6711
Croissant	1.1	67	1	80	73.7	0.3992	0.9091	0.3629
Total					184.62	1		1.0340

L'indice de laspeyres des prix est égal à 1.0340. Globalement, l'augmentation des prix de ces produits de boulangerie s'est élevée à 3.40%, selon le modèle de laspeyres.

b) Calcul de l'indice à partir de la formule simplifiée.

Boulangerie	Hier : date 0		Aujourd'hui : date *t*		$p_0 \times q_0$	$p_t \times q_0$
	Prix p_0	Quantité q_0	Prix p_t	Quantité q_t		
Baguette	0,94	118	1,05	140	110,92	123,9
Croissant	1,1	67	1	80	73,70	67
Total					184,62	190,9

On retrouve la valeur obtenue précédemment pour l'indice de laspeyres des prix, en utilisant la formule simplifiée :

$$L_{t/0}(p) = \frac{\sum p_t \times q_0}{\sum p_0 \times q_0} = \frac{190.9}{184.62} = 1.0340$$

b) Cas particulier de l'indice de laspeyres des quantités

C'est la moyenne arithmétique pondérée d'indices simples des quantités : $I^i_{t/0} = \frac{q^i_t}{q^i_0}$ les coefficients de pondération sont les mêmes que ceux utilisés pour le calcul de l'indice des prix, les prix des produits affectant en effet les quantités achetées : $a^i_0 = \frac{q^i_0 \times p^i_0}{\sum q^i_0 \times p^i_0}$

On a donc : $L(q) = \sum (a^i_0 \times \frac{q^i_t}{q^i_0}) = a^i_0 \times \frac{q^1_t}{q^1_0} + a^2_0 \times \frac{q^2_t}{q^2_0} + ... + a^n_0 \times \frac{q^n_t}{q^n_0}$ dans ce cas, la formule générale se simplifie, on a :

$$L(q) = \frac{\sum p^i_0 \times q^i_t}{\sum q^i_0 \times p^i_0} = \frac{p^1_0 \times q^1_t + p^2_0 \times q^2_t + ... + p^n_0 \times q^n_t}{p^1_0 \times q^1_t + p^2_0 \times q^2_t + ... + p^n_0 \times q^n_t}$$

Il faut donc diviser la valeur d'hier (aux prix d'hier) du « panier » d'aujourd'hui (avec les quantités achetées aujourd'hui) par la valeur hier du panier d'hier.

<u>Reprenons l'exemple 1</u>

On veut étudier l'évolution des quantités consommées des produits de boulangerie.

1. Déterminer l'indice de laspeyres des quantités en utilisant la formule générale.
2. Retrouver la valeur de cet indice à partir de la formule simplifiée.

Corrigé

1. Calcul de l'indice à partir de la formule générale : moyenne arithmétique d'indices simples.

Boulangerie	Hier : date 0		Aujourd'hui : date t		$p_0 \times q_0$	Cœfficients de pondération : $a_0 = \frac{p_0 \times q_0}{\sum p_0 \times q_0}$	Indices simples des quantités : $I_{t/0}(p) = \frac{q_t}{q_0}$	Indices simples pondérés : $a_0 \times \frac{q_t}{q_0}$
	Prix p_0	Qtité q_0	Prix p_t	Qtité q_t				
Baguette	0,94	118	1,05	140	110,92	0,6008	1,1864	0,7128
Croissant	1,1	67	1	80	73,7	0,3992	1,1940	0,4767
Total					184,62	1		1,1895

L'indice de Laspeyres des quantités est égal à 1,1895, ainsi, globalement, l'augmentation des quantités achetées de ces produits de boulangerie s'est élevée à 18,95 %, selon le modèle de Laspeyres.

2. Calcul de l'indice à partir de la formule simplifiée :

Boulangerie	Hier : date 0		Aujourd'hui : date t		$p_0 \times q_0$	$p_0 \times q_t$
	Prix p_0	Quantité q_0	Prix p_t	Quantité q_t		
Baguette	0,94	118	1,05	140	110,92	131,6
Croissant	1,1	67	1	80	73,70	88
Total					184,62	219,6

On obtient la même valeur que celle calculée précédemment pour l'indice de Laspeyres des quantités :

$$L_{t/0}(q) = \frac{\sum p_t \times q_0}{\sum p_0 \times q_0} = \frac{219.6}{184.62} = 1.1895$$

2. ***Indice de Paasche***

C'est une moyenne harmonique d'indices simples, pondérés par les cœfficients de pondération a_t^j de la date courante. Les cœfficients de pondération varient donc avec la date.

On a : $P_{t/0} = \dfrac{1}{\sum \dfrac{a_t^i}{I_{t/0}^i}}$

a) Cas particulier de l'indice de Paasche des prix

Les indices dont on veut calculer la moyenne harmonique sont des indices des prix :

$$I^i_{t/0} = \frac{p^i_t}{p^i_0}$$

Les cœfficients de pondération sont constitués de la part de la dépense consacrée aux différents articles dans la dépense totale, à la date courante.

Les cœfficients de pondération sont : $a^i_t = \frac{q^i_t p^i_t}{q^i_t p^i_t}$

Dans ce cas, la formule générale se simplifie ; on a :

$$P_{t/0}(p) = \frac{\sum q^i_t \times p^i_t}{\sum q^i_t \times p^i_0} = \frac{q^1_t \times p^1_t + q^2_t \times p^2_t + \ldots + q^n_t \times p^n_t}{q^1_t \times p^1_t + q^2_t \times p^2_t + \ldots + q^n_t \times p^n_t}$$

$$indice\ de\ paasche\ des\ quantités = \frac{valeur\ d'aujourd'hui\ du\ panier\ d'aujourd'hui}{valeur\ d'aujourd'hui\ du\ panier\ d'hier}$$

Reprenons l'exemple 1

1. Déterminer l'indice de Paasche des quantités en utilisant la formule générale.
2. Retrouver la valeur de cet indice en utilisant la formule simplifiée.

Corrigé

1. A partir de la formule générale : moyenne harmonique d'indices de quantités.

Boulangerie	Hier : date 0		Aujourd'hui : date t		$p_t \times q_t$	Cœfficients de pondération : $a_t = \frac{p_t \times q_t}{\sum p_t \times q_t}$	Indices simples des quantités : $I_{t/0}(q) = \frac{q_t}{q_0}$	Indices simples pondérés : $a_t = \frac{q_t}{q_0}$
	Prix p_0	Qtité q_0	Prix p_t	Qtité q_t				
Baguette	0,94	118	1,05	140	147	0,64758	1,1864	0,5458
Croissant	1,1	67	1	80	80	0,35242	1,1940	0,2952
Total					227	1		0,8410

L'indice de Paasche des quantités est égal à 1/0,8410 = 1,1891. Globalement, l'augmentation des quantités achetées de ces produits de boulangerie s'est élevée à 18,91 %, selon le modèle de Paasche.

2. Calcul de l'indice à partir de la formule simplifiée.

Boulangerie	Hier : date 0		Aujourd'hui : date t		$p_t \times q_t$	$q_0 \times p_t$
	Prix p_0	Quantité q_0	Prix p_t	Quantité q_t		
Baguette	0,94	118	1,05	140	147	123,9
Croissant	1,1	67	1	80	80	67
Total					227	190,9

On obtient bien sûr la même valeur de l'indice de Paasche des quantités, selon la formule simplifiée :

$$P_{t/0}(q) = \frac{\sum p_t \times q_t}{\sum p_t \times q_0} = \frac{227}{190.9} = 1.1891$$

3. ***L'indice de Fisher***

C'est la moyenne géométrique simple des indices de Laspeyres et de Paasche.

$$F_{t/0} = (L_{t/0} P_{t/0})^{1/2}$$

Reprenons l'exemple 1

L'indice de Fisher des prix est égal à la moyenne géométrique des indices de Laspeyres et de l'indice de Paasche des prix.

$$L_{t/0}(p) = 1.0340, P_{t/0}(q) = 1.0337 \quad donc\ F_{t/0}(p) = (1.0340 \times 1.0337)^{1/2} = 1.0338$$

Soit une augmentation des prix de 3,38 %.

4. ***Quelques indices particuliers :***

a. indice des valeurs

$$V_{t/0}(p) = \frac{\sum q_t^i p_t^i}{\sum q_0^i p_0^i}$$

b. indice des prix en euros constants

$$indice\,des\ \ prix\ en\,euros\,cons\tan ts = \frac{indice\,du\ prix\,de\,l'article}{indice\ générale\,des\ prix}$$

c. indice du pouvoir d'achat

$$indice\,du\ pouvoir\ d'achat = \frac{indice\,des\,salaires}{indice\ générale\,des\ \ prix}$$

d. indice de la productivité

$$indice\ de\ la\ productivité = \frac{indice\ du\ volume\ de\ la\ production}{indice\ du\ volume\ du\ travail}$$

Exemple 4

Calculer la variation du pouvoir d'achat dans les cas suivants :

- augmentation des salaires de 12 % et des prix de 14 % ;
- augmentation des salaires de 4 % et des prix de 3 %.

Corrigé

L'indice mesurant la variation du pouvoir d'achat s'exprime en rapportant la variation des salaires à celle des prix :

Indice du pouvoir d'achat = $\frac{1.12}{1.14} = 0.9825$: soit une baisse de 1.75% ;

Indice du pouvoir d'achat = $\frac{1.04}{1.03} = 1.009$: soit une hausse de 0.9%.

Exemple 5

Une entreprise fabrique deux types de produits P1 et P2. Les prix de ventes unitaires (en euros) et les volumes des ventes (en milliers d'unités) ont été relevés entre la date de la création (l'année 2010) et la date courante (l'année 2015).

Les informations sont résumées dans le tableau suivant :

Produit	Prix		Nombre de ventes	
	2010	2015	2010	2015
P_1	250	400	1,2	1,8
P_2	200	180	2,0	1,5

1. Calculer l'indice synthétique de Laspeyres des quantités et des prix.
2. Calculer les chiffres d'affaires pour chaque année.
   Calculer l'indice mesurant l'évolution du chiffre d'affaires de 2010 à 2015.

   Comment appelle-t-on cet indice ?

3. Sachant que l'indice général des prix pendant cette période est de 2,5, calculer en euros constants l'indice de Laspeyres des prix date 2015, la date de référence étant la date 2010.
4. Sachant que l'indice des quantités d'heures travaillées pour la fabrication des produits est de 0,7, calculer l'indice de productivité.

Corrigé : On notera la date 2015 date 1 et la date 2010 date 0.

1. Indice synthétique de Laspeyres.

	p_0	p_1	q_0	q_1	$I_{1/0}^J(p)$	$I_{1/0}^J(q)$	$p_0 \times q_0$	a_0^J	$a_0^J \times I_{1/0}^J(p)$	$a_0^J \times I_{1/0}^J(q)$
P1	250	400	1,2	1,8	1,6	1,5	300	0,4286	0,6857	0,6429
P2	200	180	2	1,5	0,9	0,75	400	0,5714	0,5143	0,4286
Σ							700	1	1,2	1,0714

Indice synthétique de Laspeyres des prix :

$$L_{1/0}(p) = \sum a_0^j I_{1/0}^j(p) = 1.2$$

Indice synthétique de Laspeyres des quantités :

$$L_{1/0}(q) = \sum a_0^j I_{1/0}^j(q) = 1.0714$$

2. . Calcul des chiffres d'affaires.

$$CA_{2010} = CA_0 = \sum q_0^j p_0^j = 700$$

$$CA_{2015} = CA_1 = \sum q_1^j p_1^j = 990$$

Indice mesurant l'évolution du chiffre d'affaires de 2010 à 2015 :

$$I_{1/0}(CA) = \frac{CA_1}{CA_0} = \frac{\sum p_1^j q_1^j}{\sum q_0^j p_0^j} = \frac{990}{700} = 1.4143,$$ soit une augmentation de 41,43 %.

Cet indice s'appelle l'indice des valeurs.

3. Indice de Laspeyres des prix en euros constants sachant que l'indice général des prix pendant cette période est de 2,5.

$$\text{Indice des prix en euros constants} = \frac{\text{indice du prix de l'article}}{\text{indice général des prix}} = \frac{1.2}{2.5} = 0.48$$ soit une baisse de 52%.

4. Indice de productivité sachant que l'indice des quantités d'heures travaillées pour la fabrication des produits est de 0,7.

$indice\,de\,la\;productivit\acute{e} = \frac{indice\,du\,volume\,de\,la\;production}{indice\,du\,volume\,du\,travail} = \frac{1.0714}{0.7} = 1.5306.$ soit une augmentation de 53.06%.