2. Méthode du simplexe et son analyse

Transformation de max en min

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

où $f : X \rightarrow R^1$.

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } \ w \in X \subset R^n$$

où $f : X \rightarrow R^1$.

- Soit w^* un point de X où le maximum est atteint.

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$
$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

où $f : X \to R^1$.

- Soit w^* un point de X où le maximum est atteint.
- Donc $\quad f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

où $f : X \rightarrow R^1$.

- Soit w^* un point de X où le maximum est atteint.
- Donc $\quad f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

ou $\quad -f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$
$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

où $f : X \to R^1$.

- Soit w^* un point de X où le maximum est atteint.
- Donc $\quad f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

ou $\quad -f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$-f(w^*) = \min -f(w)$$
$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

où $f : X \rightarrow R^1$.

- Soit w^* un point de X où le maximum est atteint.
- Donc $\quad f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

ou $\quad -f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$-f(w^*) = \min -f(w)$$

$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

et w^* est un point de X où la fonction $-f(w)$ atteint son minimum.

Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$
$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

où $f : X \rightarrow R^1$.

- Soit w^* un point de X où le maximum est atteint.
- Donc $\quad f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

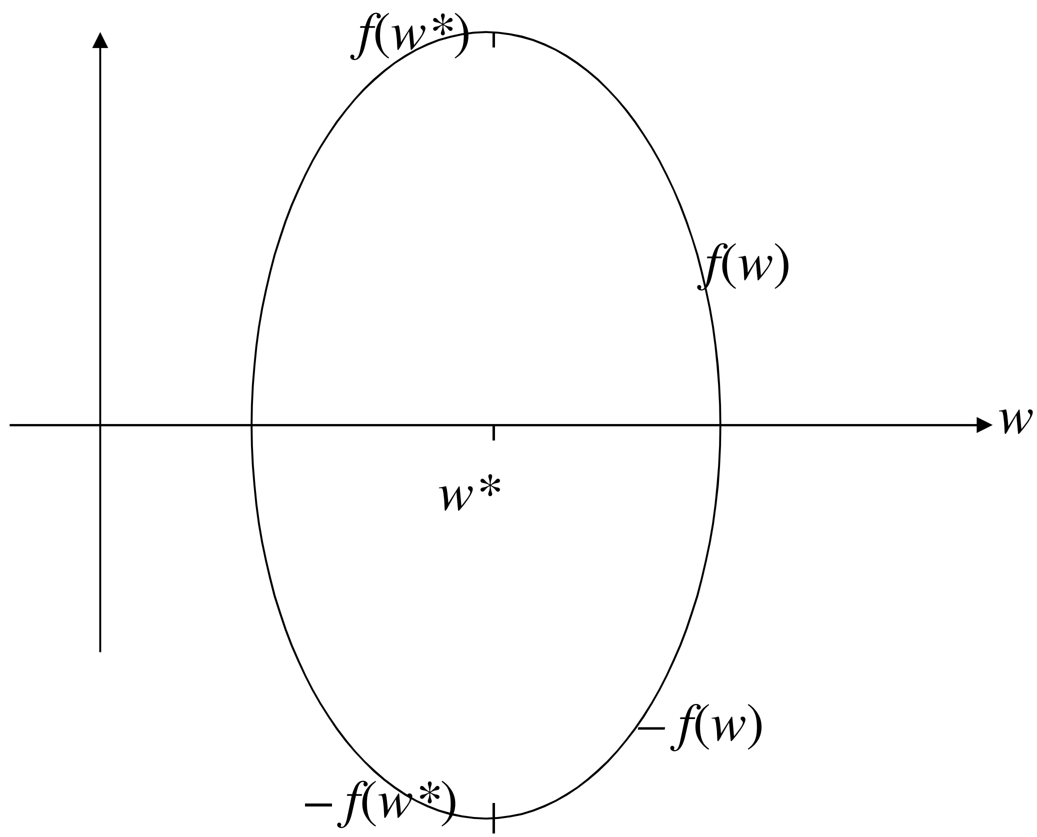
ou $\quad -f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$-f(w^*) = \min -f(w)$$
$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

et w^* est un point de X où la fonction $-f(w)$ atteint son minimum.

- Ainsi qu'on max $f(w)$ ou qu'on min $-f(w)$, on retrouve la même sol. opt. w^*.



f(w*)
f(w)
w
w*
− f(w)
− f(w*)

Transformation de max en min

- De plus,

$$f(w^*) = \max f(w) \;=\; -\min -f(w) = -\,(-f(w^*)\,)$$

- Nous allons toujours transformer les problèmes de max en problème de min.

- Donc $\qquad f(w^*) \;\geq\; f(w) \qquad \forall w \in X$

  ou $\qquad -f(w^*) \;\leq\; -f(w) \qquad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$-f(w^*) = \;\min -f(w)$$

$$\text{Sujet à } \; w \in X \subset R^n$$

  et w^* est un point de X où la fonction $-f(w)$ atteint son minimum.

- Ainsi qu'on max $f(w)$ ou qu'on min $-f(w)$, on retrouve la même sol. opt. w^*.

Problème du restaurateur

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x + 6y \\ \text{Sujet à} \quad & \\ & 5x + 3y \leq 30 \\ & 2x + 3y \leq 24 \\ & 1x + 3y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & -(8x + 6y) \\ \text{Sujet à} \quad & \\ & 5x + 3y \leq 30 \\ & 2x + 3y \leq 24 \\ & 1x + 3y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Méthode de résolution graphique

- Méthodes pour problème ne comportant que deux variables
- Revenons au problème du restaurateur après l'avoir transformer en un problème de min:

$$\min \; z = -8x - 6y$$

Sujet à

$$5x + 3y \leq 30$$
$$2x + 3y \leq 24$$
$$1x + 3y \leq 18$$
$$x, y \geq 0$$

Domaine réalisable

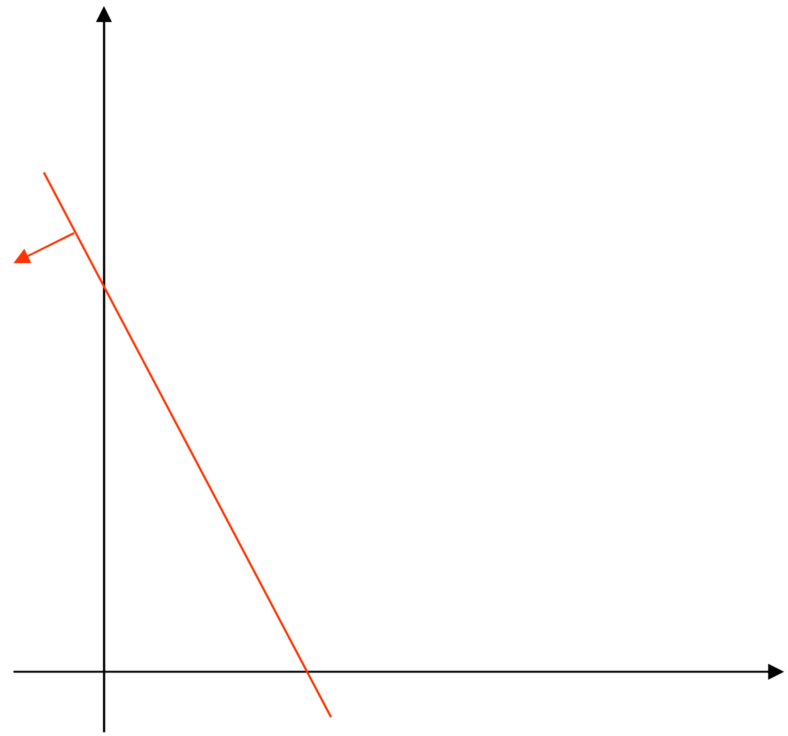
- Traçons la droite

$$5x + 3y = 30$$

L'ensemble des points qui satisfont la contrainte

$$5x + 3y \leq 30$$

sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation



Domaine réalisable

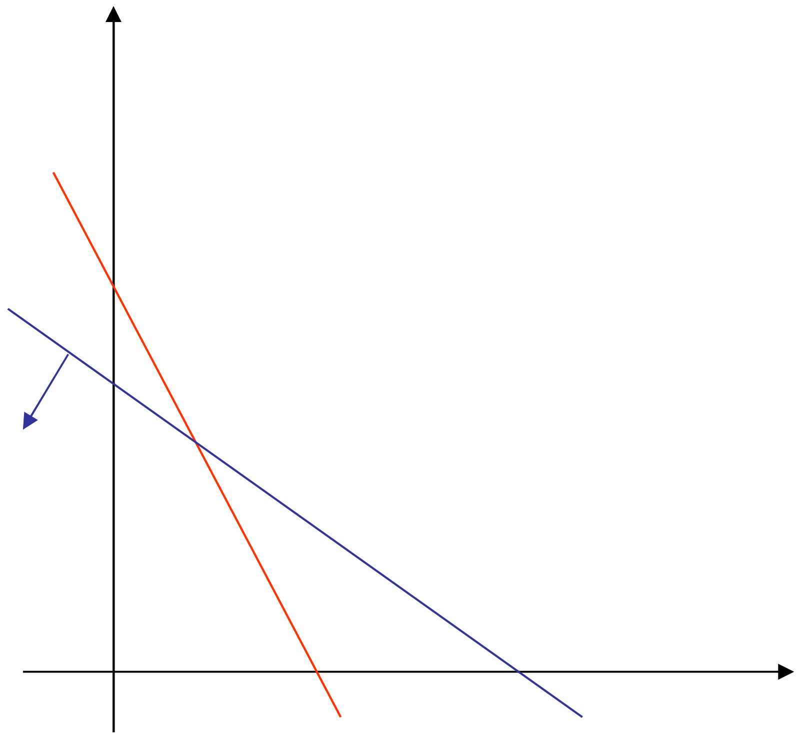
- Traçons la droite

$$2x + 3y = 24$$

L'ensemble des points qui satisfont la contrainte

$$2x + 3y \leq 24$$

sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation



Domaine réalisable

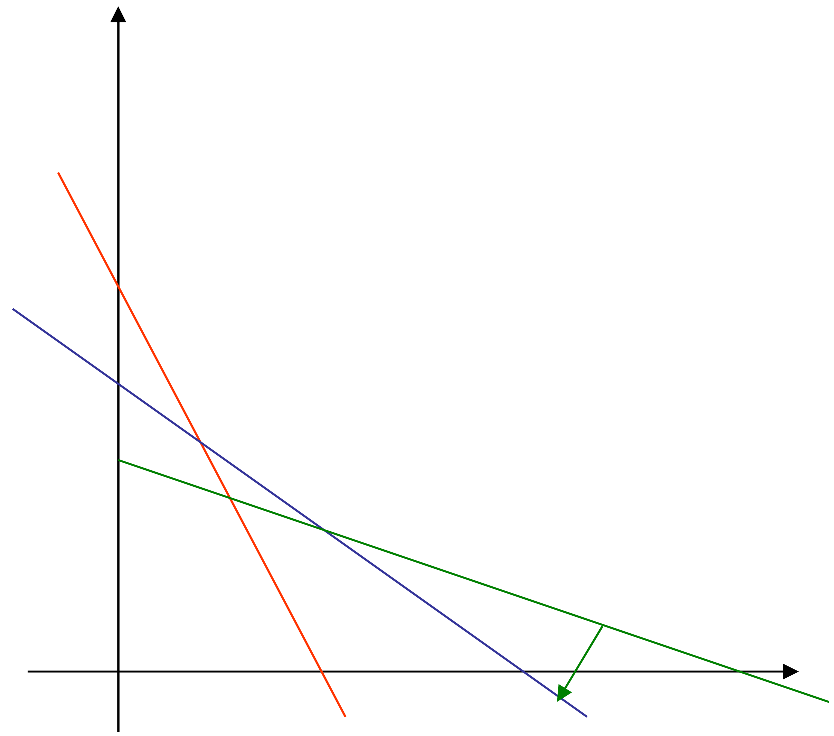
- Traçons la droite

$$1x + 3y = 18$$

L'ensemble des points qui satisfont la contrainte

$$1x + 3y \leq 18$$

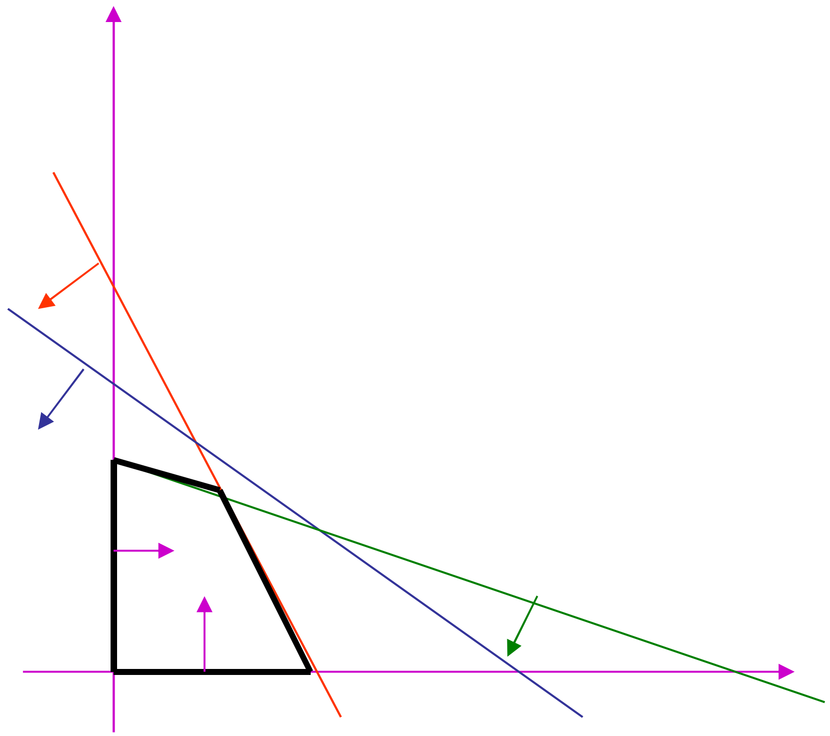
sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation



Domaine réalisable

- L'ensemble des points réalisables pour le système

$$5x + 3y \leq 30$$
$$2x + 3y \leq 24$$
$$1x + 3y \leq 18$$
$$x,y \geq 0$$



Résolution

- Considérons la fonction économique :

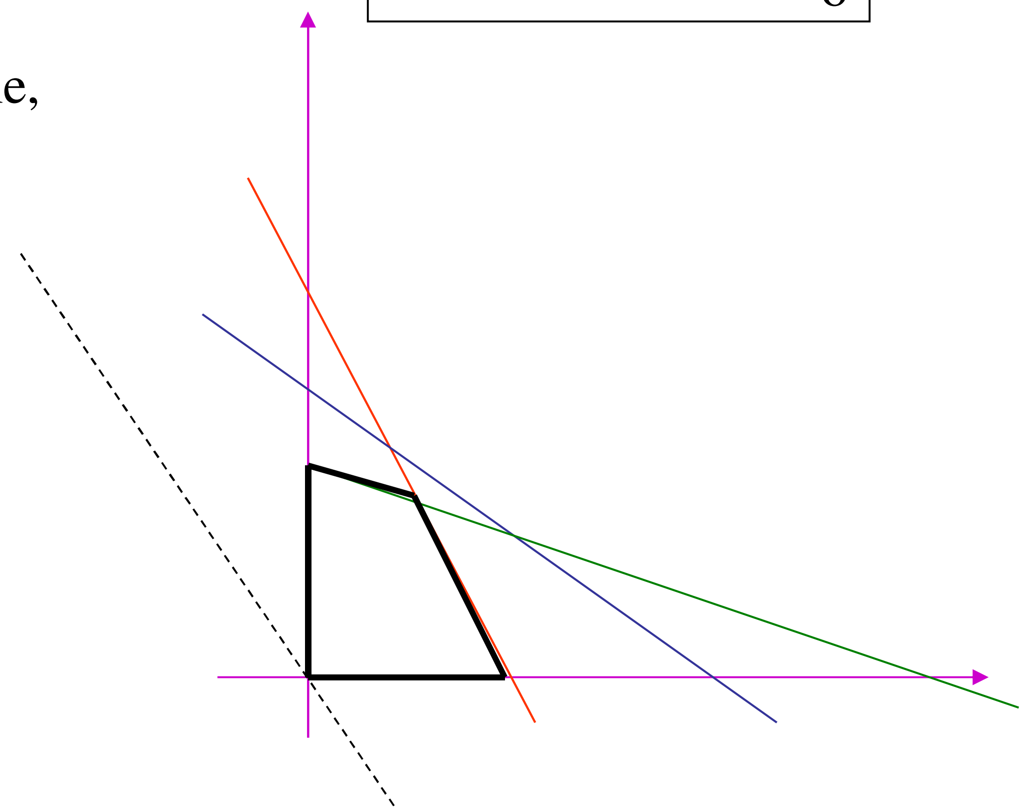
$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow z = 0$

$$y = -\frac{8}{6}x - \frac{z}{6}$$

droites de pente $-\frac{8}{6}$



Résolution

- Considérons la fonction économique :

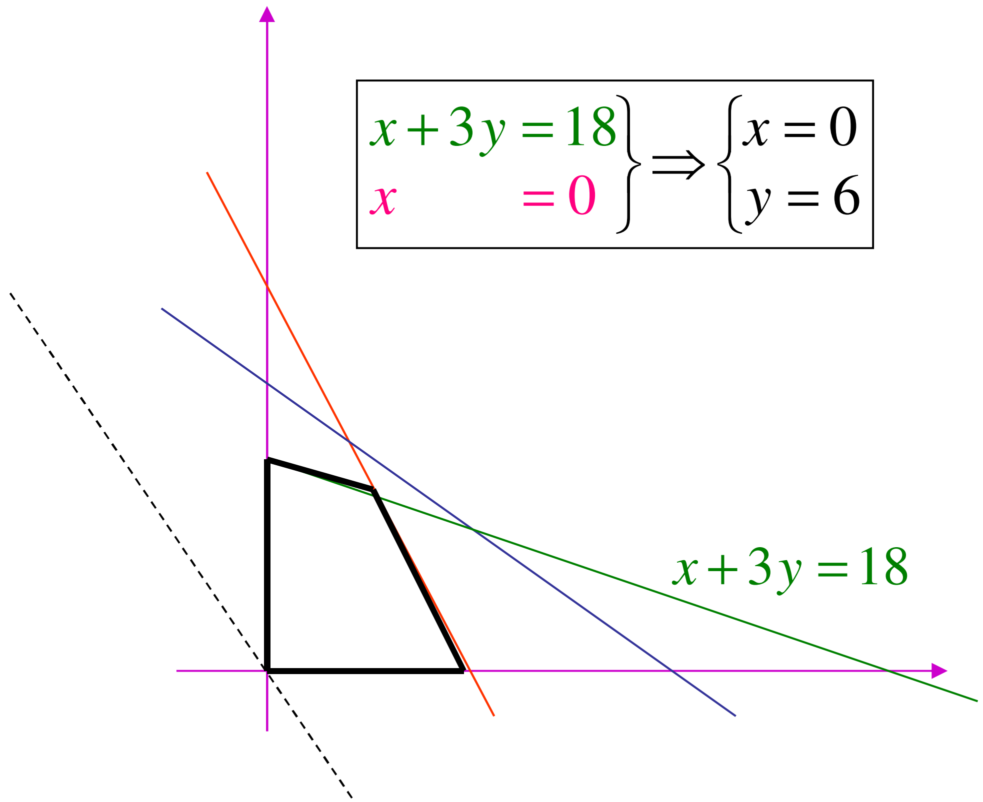
$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow z = 0$

$x = 0$ et $y = 6 \Rightarrow z = -36$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=18 \\ x \qquad\;\; =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$$



Résolution

- Considérons la fonction économique :

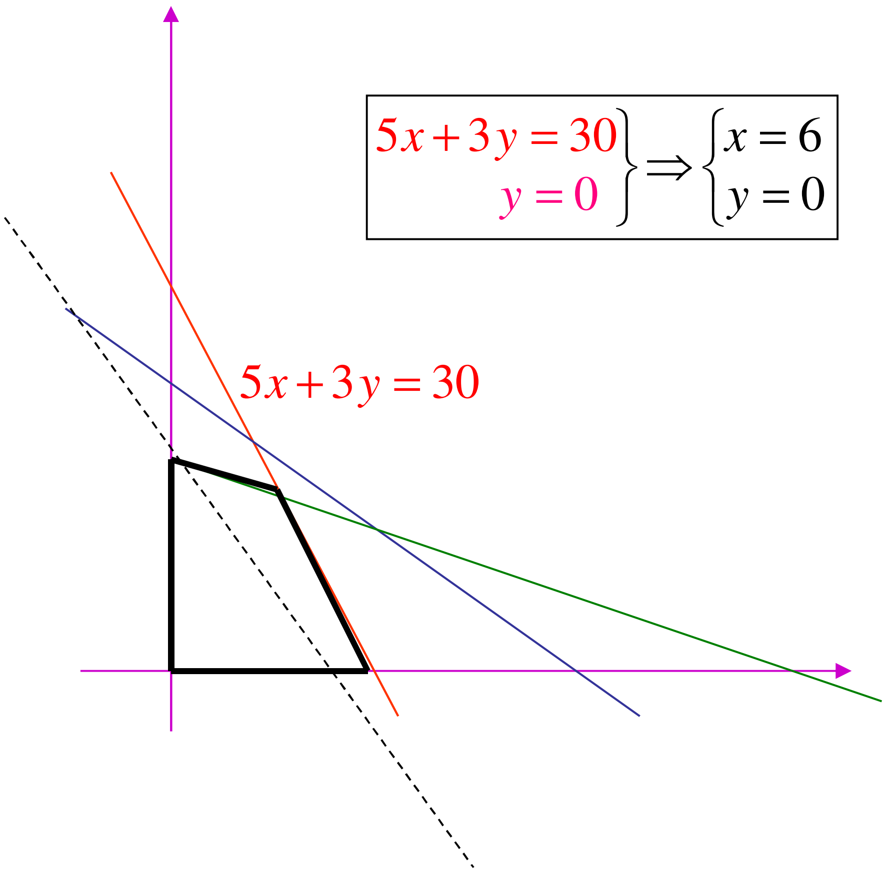
$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow z = 0$

$x = 0$ et $y = 6 \Rightarrow z = -36$

$x = 6$ et $y = 0 \Rightarrow z = -48$



$$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=30 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$$

Résolution

- Considérons la fonction économique :

$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow z = 0$

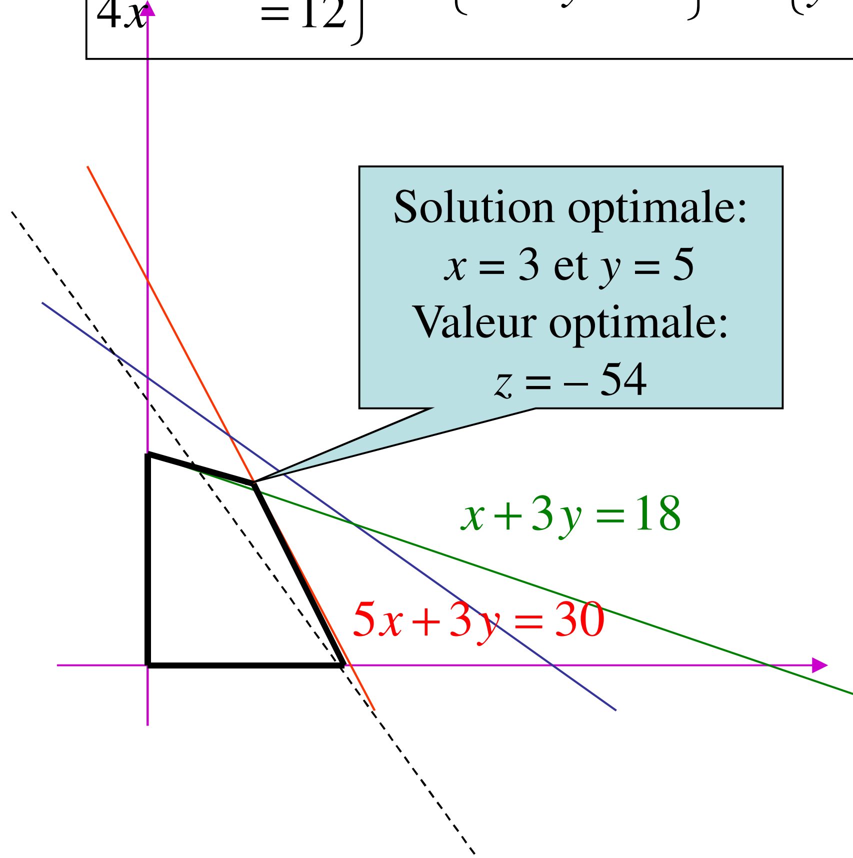
$x = 0$ et $y = 6 \Rightarrow z = -36$

$x = 6$ et $y = 0 \Rightarrow z = -48$

$x = 3$ et $y = 5 \Rightarrow z = -54.$

- Impossible d'aller plus loin sans sortir du domaine réalisable.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=30 \\ x+3y=18 \\ \hline 4x \qquad\quad =12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ 3+3y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=5 \end{array}\right.$$



Mes acétates électroniques pour IFT2505 sont disponibles sur mon site Web :

http://www.iro.umontreal.ca/~ferland

Auxiliaire d'enseignement:

El Filali, Souhaïla

Variables d'écart

- Transformer les contraintes d'inégalité en des contraintes d'égalité avec des variables d'écart prenant des valeurs non négatives:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \longrightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

$$y_i \geq 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \longrightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$

$$y_i \geq 0$$

Problème du restaurateur transformé en min

- Transformons les contraintes d'inégalité du problème du restaurateur en égalité avec les variables d'écart *u, p* et *h*:

$\min\ z = -8x - 6y$	$\min\ z = -8x - 6y$
Sujet à	Sujet à
$5x + 3y \leq 30$	$5x + 3y + u = 30$
$2x + 3y \leq 24$	$2x + 3y + p = 24$
$1x + 3y \leq 18$	$1x + 3y + h = 18$
$x, y \geq 0$	$x, y, u, p, h \geq 0$

- Les contraintes constituent un système de 3 équations comportant 5 variables. Exprimons 3 des variables en fonction des 2 autres

Méthode du simplexe – forme algébrique

- Les contraintes constituent un système de 3 équations comportant 5 variables. Exprimons 3 des variables en fonction des 2 autres:

$$
\begin{aligned}
u &= 30 - 5x - 3y \\
p &= 24 - 2x - 3y \\
h &= 18 - 1x - 3y \\
z &= 0 \quad - 8x - 6y
\end{aligned}
$$

- En fixant x et y nous retrouvons les valeurs des autres variables.
- Il suffit de trouver les valeurs non négatives de x et y qui entraînent des valeurs non négatives de u, p et h et qui donnent à z sa valeur minimale.
- Infinité de valeurs possibles. Il faut donc une procédure systématique pour y arriver.

Choix de la variable à augmenter

- Une solution réalisable du système

$$\begin{aligned} u &= 30 - 5x - 3y \\ p &= 24 - 2x - 3y \\ h &= 18 - 1x - 3y \\ z &= 0 \quad - 8x - 6y \end{aligned}$$

  est la suivante

  $x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 30, p = 24, h = 18 \quad$ et $\quad z = 0.$

- Nous pouvons réduire la valeur de z en augmentant la valeur de x, ou bien celle de y, ou bien celles des deux.
- Mais nous choisissons d'augmenter la valeur d'une seule variable.
- Puisque nous cherchons à minimiser z, il est avantageux d'augmenter la valeur de x puisque pour chaque augmentation d'une unité de x entraîne une diminution de 8 unités de z.

Augmentation limitée de la variable qui augmente

- Mais l'augmentation de x est limitée par les contraintes de non négativité des variables u, p et h:

$$u = 30 - 5x - 3y \geq 0$$
$$p = 24 - 2x - 3y \geq 0$$
$$h = 18 - 1x - 3y \geq 0$$

- Puisque la valeur de y est maintenue à 0, ceci est équivalent à

$$u = 30 - 5x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 30 / 5 = 6$$
$$p = 24 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 24 / 2 = 12$$
$$h = 18 - 1x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 18$$

- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que

$$x \leq \min \{6, 12, 18\} = 6.$$

Nouvelle solution

- $u \quad = 30 - 5x - 3y$

  $p \quad = 24 - 2x - 3y$

  $h \quad = 18 - 1x - 3y$

  $z \quad = 0 \quad - 8x - 6y$
- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que

$$x \leq \min\{6, 12, 18\} = 6.$$

- Puisque l'objectif est de minimiser z, nous allons choisir la plus grande valeur possible de x: i.e., $x = 6$.
- La nouvelle solution est donc

$$x = 6,\ \ y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, p = 12, h = 12 \quad \text{et} \quad z = -48.$$

Nouvelle itération

- $u = 30 - 5x - 3y$
  $p = 24 - 2x - 3y$
  $h = 18 - 1x - 3y$
  $z = 0 - 8x - 6y$
- La nouvelle solution est donc
  $x = 6,\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0, p = 12, h = 12 \quad \text{et} \quad z = -48.$
- Cette solution est la seule pour le système précédent lorsque $y = u = 0$ puisque la matrice des coefficients des variables u, p et h est non singulière.
- Par conséquent, pour retrouver une autre solution différente, il faut que y ou u prennent une valeur positive.
- Précédemment, l'analyse était facilitée par le fait que les variables x et y qui pouvaient être modifiées étaient à droite.

Transformation du système

- Isolons donc y et u du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:
- $u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow 5x = 30 - u - 3y$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

Transformation du système

- Isolons donc y et u du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:
- $u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow (5x = 30 - u - 3y) \div 5$

  $\Rightarrow \quad x = 6 - 1/5u - 3/5y$

  $p = 24 - 2x - 3y$

  $h = 18 - 1x - 3y$

  $z = 0 - 8x - 6y$

Transformation du système

- Isolons donc y et u du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:
- $u = 30 - 5x - 3y \quad \Rightarrow \quad x = \underline{6 - 1/5u - 3/5y}$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$\Rightarrow \quad p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) - 3y$$

$$\Rightarrow \quad p = 12 + 2/5u - 9/5y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 \quad - 8x - 6y$$

- Substituons la valeur de x dans les autres équations

Transformation du système

- Isolons donc y et u du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:
- $u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow x = \underline{6 - 1/5u - 3/5y}$

  $p = 24 - 2x - 3y \Rightarrow p = 12 + 2/5u - 9/5y$

  $h = 18 - 1x - 3y$

  $\Rightarrow h = 18 - (6 - 1/5u - 3/5y) - 3y$

  $\Rightarrow h = 12 + 1/5u - 12/5y$

  $z = 0 - 8x - 6y$

- Substituons la valeur de x dans les autres équations

Transformation du système

- Isolons donc y et u du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:
- $u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow x = \underline{6 - 1/5u - 3/5y}$

$p = 24 - 2x - 3y \Rightarrow p = 12 + 2/5u - 9/5y$

$h = 18 - 1x - 3y \Rightarrow h = 12 + 1/5u - 12/5y$

$z = 0 - 8x - 6y$

$\Rightarrow z = 0 - 8(6 - 1/5u - 3/5y) - 6y$

$\Rightarrow z = -48 + 8/5u - 6/5y$

- Substituons la valeur de x dans les autres équations

Système équivalent

- Nous avons donc transformer le système

- $$\begin{aligned} u &= 30 - 5x - 3y & \Rightarrow \quad x &= 6 - 1/5u - 3/5y \\ p &= 24 - 2x - 3y & \Rightarrow \quad p &= 12 + 2/5u - 9/5y \\ h &= 18 - 1x - 3y & \Rightarrow \quad h &= 12 + 1/5u - 12/5y \\ z &= 0 - 8x - 6y & \Rightarrow \quad z &= -48 + 8/5u - 6/5y \end{aligned}$$

Système équivalent

- Nous obtenons un nouveau système équivalent au précédent (dans le sens où les deux systèmes ont les mêmes solutions réalisables)
- Notons qu'il n'est pas intéressant d'augmenter u car alors la valeur de z augmente
- Nous répétons le processus précédent en augmentant la valeur de y

$$
\begin{aligned}
x \qquad\qquad\qquad &= 6 - 1/5u - 3/5y \\
p \qquad\qquad &= 12 + 2/5u - 9/5y \\
h \qquad &= 12 + 1/5u - 12/5y \\
z &= -48 + 8/5u - 6/5y
\end{aligned}
$$

Nouvelle itération

- Mais l'augmentation de *y* est limité par les contraintes de non négativité des variables *x*, *p* et *h:*

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y \geq 0$$
$$p = 12 + 2/5u - 9/5y \geq 0$$
$$h = 12 + 1/5u - 12/5y \geq 0$$

- Puisque la valeur de *u* est maintenue à 0, ceci est équivalent à

$$x = 6 - 3/5y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 10$$
$$p = 12 - 9/5y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 20/3$$
$$h = 12 - 12/5y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 5$$

- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que

$$y \leq \min\,\{10, 20/3, 5\} = 5.$$

Nouvelle itération

- $$\begin{aligned} x &= 6 - 1/5u - 3/5y \geq 0 \\ p &= 12 + 2/5u - 9/5y \geq 0 \\ h &= 12 + 1/5u - 12/5y \geq 0 \\ z &= -48 + 8/5u - 6/5y \end{aligned}$$
- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que
$$y \leq \min\{10, 20/3, 5\} = 5.$$
- Puisque l'objectif est de minimiser z, nous allons choisir la plus grande valeur possible de y: i.e., $y = 5$.
- La nouvelle solution est donc
$$y = 5,\ u = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3,\ p = 3,\ h = 0 \quad \text{et} \quad z = -54.$$

Solution optimale

- Isolons donc h et u du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où y et h apparaissent pour exprimer y en fonction de h et u.

$$h = 12 + 1/5u - 12/5y$$

- Substituons la valeur de y dans les autres équations.
- Le système devient

$$\begin{aligned} x &= 3 - 1/4u + 1/4h \\ p &= 3 + 1/4u + 3/4h \\ y &= 5 + 1/12u - 5/12h \\ z &= -54 + 3/2u + 1/2h \end{aligned}$$

- La solution $y = 5$, $u = 0$, $x = 3$, $p = 3$, $h = 0$ (dont la valeur $z = -54$) est donc optimale puisque les coefficients de u et h sont positifs.
- En effet la valeur de z ne peut qu'augmenter lorsque u ou h augmente.

Type de solutions considérées

- Nous n'avons considéré que des solutions où il n'y a que trois variables positives!
- Comme il y a 5 variables, il y a au plus $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ solutions différentes de ce type.
- Pourrait-il exister une meilleure solution qui aurait un nombre de variables positives différent de 3?
- Nous pouvons démontrer que non.

On peut démontrer que la méthode du simplexe circule autour du domaine réalisable pour identifier une solution optimale sans jamais pénétrer à l'intérieur du domaine réalisable.

Quand on résout le problème du restaurateur avec la méthode du simplexe:

La solution initiale est donnée par:

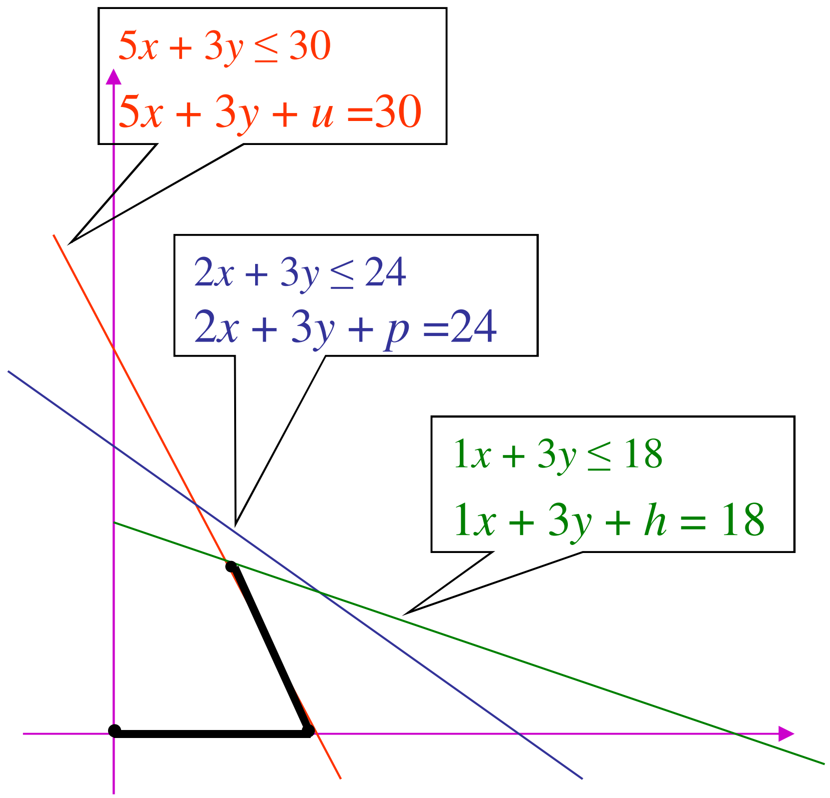
$x = y = 0$ ($u = 30$, $p = 24$, $h = 18$)
et la valeur de $z = 0$

Quand on augmente la valeur de x, la solution devient

$x = 6$, $y = 0$ ($u = 0$, $p = 12$, $h = 12$)
et la valeur de $z = -48$

Quand on augmente la valeur de y, la solution devient

$x = 3$, $y = 5$($u = 0$, $p = 3$, $h = 0$)
et la valeur de $z = -54$



Méthode du simplexe – forme avec tableaux

- Nous allons plutôt utiliser des tableaux pour compléter les itérations de l’algorithme du simplexe.

- Illustrons d’abord en complétant une itération du simplexe sous cette forme pour le problème du restaurateur.

Problèmes équivalents

$$\min \ z = -8x - 6y$$

Sujet à

$$\begin{aligned} 5x + 3y + u \quad\quad\quad &= 30 \\ 2x + 3y \quad + p \quad &= 24 \\ 1x + 3y \quad\quad + h &= 18 \\ x, y, u, p, h &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min z$$

Sujet à

$$\begin{aligned} 5x + 3y + u \quad\quad\quad &= 30 \\ 2x + 3y \quad + p \quad &= 24 \\ 1x + 3y \quad\quad + h &= 18 \\ -8x - 6y \quad\quad\quad -z &= 0 \\ x, y, u, p, h &\geq 0 \end{aligned}$$

Tableau équivalent au système

min $z = -8x - 6y$

Sujet à

$$\begin{aligned} 5x + 3y + u \qquad\qquad &= 30 \\ 2x + 3y \qquad + p \qquad &= 24 \\ 1x + 3y \qquad\qquad + h &= 18 \\ x, y, u, p, h &\geq 0 \end{aligned}$$

min z

Sujet à

$$\begin{aligned} 5x + 3y + u \qquad\qquad\qquad &= 30 \\ 2x + 3y \qquad + p \qquad\qquad &= 24 \\ 1x + 3y \qquad\qquad + h \qquad &= 18 \\ -8x - 6y \qquad\qquad\qquad -z &= 0 \\ x, y, u, p, h &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 30 - 5x - 3y \\ p &= 24 - 2x - 3y \\ h &= 18 - 1x - 3y \\ z &= 0 \quad -8x - 6y \end{aligned}$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

$$u = 30 - 5x - 3y$$
$$p = 24 - 2x - 3y$$
$$h = 18 - 1x - 3y$$
$$z = 0 \quad -8x - 6y$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Étale 1: Critère d'entrée

$$\bar{c}_s = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \bar{c}_j \right\}$$

Pour déterminer la variable d'entrée, nous choisissons l'élément le plus petit de la dernière ligne du tableau

$$\min \{-8, -6, 0, 0, 0\} = -8.$$

x est donc la variable d'entrée

$$\begin{aligned} u &= 30 - 5x - 3y \\ p &= 24 - 2x - 3y \\ h &= 18 - 1x - 3y \\ z &= 0 \quad -8x - 6y \end{aligned}$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable d'entrée

Étape 2: critère de sortie

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

Pour identifier la variable de sortie déterminons le min des quotients des termes de droite divisés par les éléments correspondants dans la colonne de la variable d'entrée qui sont positifs:

$$
\begin{aligned}
u &= 30 - 5x - 3y \\
p &= 24 - 2x - 3y \\
h &= 18 - 1x - 3y \\
z &= 0 \quad -8x - 6y
\end{aligned}
$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable d'entrée

Étape 2: critère de sortie

$$
x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}
$$

min {30/5, 24/2, 18} = 30/5 = 6

La variable correspondante *u* devient la variable de sortie

$$
\begin{aligned}
u &= 30 - 5x - 3y \\
p &= 24 - 2x - 3y \\
h &= 18 - 1x - 3y \\
z &= 0 \quad -8x - 6y
\end{aligned}
$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Variable de sortie

variable d'entrée

Étape 3 : Pivot

Transformation du système ou du tableau

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

RAPPEL: Nous utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:

$$u = 30 - 5x - 3y \quad \Rightarrow \quad (5x = 30 - u - 3y) / 5$$

$$\Rightarrow \quad x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

Ceci est équivalent à

$$5x + 3y + u = 30$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

RAPPEL: Nous utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:

$$u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow (5x = 30 - u - 3y) / 5$$

$$\Rightarrow x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u = 30) / 5$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

RAPPEL: Nous utilisons l'équation où x et u apparaissent pour exprimer x en fonction de u et y:

$$u \quad = 30 - 5x - 3y \quad \Rightarrow \quad (5x = 30 - u - 3y) / 5$$

$$\Rightarrow \quad x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u \quad =30) / 5 \Rightarrow x + 3/5y + 1/5u \quad = 6$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u \qquad =30) \,/\, 5 \Rightarrow x + 3/5y + 1/5u \qquad = 6$$

En terme du tableau, ceci est équivalent à diviser la ligne de la variable de sortie par le coefficient de la variable d'entrée dans cette ligne

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Divisons cette ligne par 5

variable de sortie

variable d'entrée

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u \qquad = 30) \,/\, 5 \Rightarrow x + 3/5y + 1/5u \qquad = 6$$

En terme du tableau, ceci est équivalent à diviser la ligne de la variable de sortie par le coefficient de la variable d'entrée dans cette ligne

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Divisons cette ligne par 5

variable de sortie

variable d'entrée

Le tableau qui en résulte est le suivant

$$\boxed{x + 3/5\,y + 1/5\,u = 6}$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

- Rappel: Nous substituons l'expression de x dans les autres équations

$$x = \underline{6 - 1/5u - 3/5y}$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$\Rightarrow \quad p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) - 3y$$

Ceci est équivalent à : $p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) + 2x - 2x - 3y$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + p - 2\,(x + 3/5y + 1/5u) = 24 - 2(6)$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

deuxième ligne
moins
2(la première ligne)

Ceci est équivalent à : $p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) + 2x - 2x - 3y$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + p - 2\,(x + 3/5y + 1/5u) = 24 - 2(6)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 3y \qquad + p = 24$$

$$\underline{-\,2\,(x + 3/5y + 1/5u \qquad = 6)}$$

$$0x + 9/5y - 2/5u + p = 12$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

deuxième ligne
moins
2(la première ligne)

Le tableau devient

$$\boxed{0x + 9/5y - 2/5u + p = 12}$$

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p		9/5	-2/5	1			12
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

En répétant le processus pour les autres lignes du tableau

Var. dep.	x	y	u	p	h	$-z$	termes droite
x	1	3/5	1/5				6
p		9/5	-2/5	1			12
h		12/5	-1/5		1		12
$-z$		-6/5	8/5			1	48

Forme standard

- Après avoir transformé les contraintes d'inégalité en égalités, nous retrouvons le problème sous sa forme standard où certaines variables peuvent être des variables d'écart:

$$
\begin{array}{rl}
\min & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
\text{Sujet à} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
& \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad\quad . \\
& \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad\quad . \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
& x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geq 0
\end{array}
$$

Itération typique

- Pour analyser une itération typique du simplexe, supposons qu'après un certain nombre d'itérations les variables x_1, x_2, …, x_m sont exprimées en fonction des autres variables .

Forme du système

- Le système est de la forme suivante:

$$
\begin{array}{l}
x_1 + \qquad\qquad + \bar{a}_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1s} x_s + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1 \\
\quad x_2 + \qquad + \bar{a}_{2m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2s} x_s + \ldots + \bar{a}_{2n} x_n = \bar{b}_2 \\
\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\
\qquad x_r + \;\; + \bar{a}_{rm+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{rs} x_s + \ldots + \bar{a}_{rn} x_n = \bar{b}_r \\
\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\
\qquad\quad x_m + \bar{a}_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{ms} x_s + \ldots + \bar{a}_{mn} x_n = \bar{b}_m \\
\qquad\qquad\quad \bar{c}_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_s x_s + \ldots + \bar{c}_n x_n = z - \bar{z}
\end{array}
$$

- Les variables x_1, x_2, …, x_m sont dénotées comme étant les variables dépendantes alors que les autres variables sont les variables indépendantes.

Simplexe –forme avec tableaux
Itération typique

- Décrivons une itération typique pour résoudre le problème général avec le simplexe – forme avec tableaux

- Le système

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 + & & + \bar{a}_{1m+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{1s} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{1n} x_n & = \bar{b}_1 \\
& x_2 + & + \bar{a}_{2m+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{2s} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{2n} x_n & = \bar{b}_2 \\
& . & . & & . & & & . \\
& & x_r + \quad + \bar{a}_{rm+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{rs} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{rn} x_n & = \bar{b}_r \\
& . & . & & . & & & . \\
& & x_m + \bar{a}_{mm+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{ms} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{mn} x_n & = \bar{b}_m \\
& & \bar{c}_{m+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{c}_s x_s & + \ldots + & \bar{c}_n x_n & = z - \bar{z}
\end{array}
$$

Itération typique

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 + & & + \bar{a}_{1m+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{1s} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{1n} x_n & = \bar{b}_1 \\
& x_2 + & + \bar{a}_{2m+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{2s} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{2n} x_n & = \bar{b}_2 \\
& & . & & . & & & . \\
& x_r + & + \bar{a}_{rm+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{rs} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{rn} x_n & = \bar{b}_r \\
& . & . & & . & & & . \\
& x_m & + \bar{a}_{mm+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{a}_{ms} x_s & + \ldots + & \bar{a}_{mn} x_n & = \bar{b}_m \\
& & \bar{c}_{m+1} x_{m+1} & + \ldots + & \bar{c}_s x_s & + \ldots + & \bar{c}_n x_n & = z - \bar{z}
\end{array}
$$

peut être représenter dans le tableau suivant

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$	Termes de droite
x_1	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$					$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_r				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$			$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_m						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 1: Choix de la variable d'entrée

- En se référant à la dernière ligne du tableau, soit $\bar{c}_s = \min\limits_{1 \le j \le n} \left\{ \bar{c}_j \right\}$

Si $\bar{c}_s \ge 0$, alors la solution courante est optimale et l'algorithme s'arrête

Variable d'entrée

		$\cdots x_m$	x_{m+1}	$\cdots x_s$	$\cdots x_n$	$-z$	Termes de droite
			$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots \bar{a}_{1s}$	$\cdots \bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2	1		$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots \bar{a}_{2s}$	$\cdots \bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots \bar{a}_{rs}$	$\cdots \bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_m		1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots \bar{a}_{ms}$	$\cdots \bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$			$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots \bar{c}_s$	$\cdots \bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Si $\bar{c}_s < 0$, alors x_s est la variable d'entrée

Étape 2: Choix de la variable de sortie

Si $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq m$
le problème n'est pas borné et l'algo. s'arrête

Variable d'entrée

		$\cdots x_r \cdots x_m$	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$	Termes de droite
x_1	1		$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
			$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
				$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
				$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
			$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
			$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Si $\exists i$ tel que $a_{is} > 0$
alors la sol. demeure réalisable
$\Leftrightarrow \forall i$ tel que $\bar{a}_{is} > 0$

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_s \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

La variable d'entrée x_s prend la valeur

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

Étape 2: Choix de la variable de sortie

Variable d'entrée

Variable de sortie

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$	Termes de droite
x_1	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$					$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_r				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$			$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_m						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

L'élément de pivot $\bar{a}_{rs}$ est à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée x_s et de la ligne de la variable de sortie x_r

Variable d'entrée

Variable de sortie

dépendantes	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$	Termes de droite
x_1	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$						$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
x_r				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$				$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
x_m						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

Variable d'entrée

Variable de sortie

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$\bar{a}_{rs}\ z$	Termes de droite
x_1	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\bar{a}_{rs}$		$\ddots$						$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
x_r				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$				$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
x_m						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{a}_{rs}$	$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

Divisons la ligne r par l'élément de pivot $\bar{a}_{rs}$ afin d'obtenir la ligne *r* résultante

Variable d'entrée

Variable de sortie

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots x_r \cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots x_s$	$\cdots x_n$	$-z$	Termes de droite	
x_1	1				$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots \bar{a}_{1s}$	$\cdots \bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$	
x_2		1			$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots \bar{a}_{2s}$	$\cdots \bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$	
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$	
x_r			1		$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots \bar{a}_{rs}$	$\cdots \bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$	$\dfrac{1}{\bar{a}_{rs}}$
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$	
x_m				1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots \bar{a}_{ms}$	$\cdots \bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$	
$-z$					$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots \bar{c}_s$	$\cdots \bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$	

Étape 3: Pivot

Divisons la ligne r par l'élément de pivot $\bar{a}_{rs}$ afin d'obtenir la ligne *r* résultante

Variable d'entrée

Variable de sortie

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$	Termes de droite
x_1	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$					$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_r				$\frac{1}{\bar{a}_{rs}}$			$\frac{\bar{a}_{r\,m+1}}{\bar{a}_{rs}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
$\vdots$													
x_m						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$		b_m
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne r résultante par $\bar{a}_{is}$ pour la soustraire de la ligne i du tableau. Ceci ramène le coefficient de la variable d'entrée x_s à 0.

Variable d'entrée

Variable de sortie

Va… dépendantes	x_1	$x_2 \cdots$	$x_r \cdots$	x_m	$\cdots$	$\cdots x_s$	$\cdots x_n$	$-z$	…mes de droite
x_1	1				$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots \bar{a}_{1s}$	$\cdots \bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1			$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots \bar{a}_{2s}$	$\cdots \bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_r			1		$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots \bar{a}_{rs}$	$\cdots \bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_m	$\bar{a}_{rs}$			1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots \bar{a}_{ms}$	$\cdots \bar{a}_{mn}$	$\bar{a}_{rs}$	$\bar{b}_m$
$-z$					$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots \bar{c}_s$	$\cdots \bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne r résultante par $\bar{a}_{is}$ pour la soustraire de la ligne i du tableau. Ceci ramène le coefficient de la variable d'entrée x_s à 0.

Variable d'entrée

Variable de sortie

Va… dépendantes	$x_1 \quad x_2 \cdots x_r \cdots x_{m+1} \cdots x_s \cdots x_n \quad z$	…rmes de droite
x_1	$1 \qquad \bar{a}_{1m+1} \cdots \bar{a}_{1s} \cdots \bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
x_2	$1 \qquad \bar{a}_{2m+1} \cdots \bar{a}_{2s} \cdots \bar{a}_{2n}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\ddots \qquad \ddots \qquad \ddots$	$\vdots$
x_r	$1 \qquad \bar{a}_{rm+1} \cdots \bar{a}_{rs} \cdots \bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\ddots \qquad \ddots \qquad \ddots$	$\vdots$
x_m	$1 \qquad \bar{a}_{mm+1} \cdots \bar{a}_{ms} \cdots \bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$
$-z$	$\bar{c}_{m+1} \cdots \bar{c}_s \cdots \bar{c}_n \quad 1$	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne r résultante par $\bar{a}_{is}$ pour la soustraire de la ligne i du tableau. Ceci ramène le coefficient de la variable d'entrée x_s à 0.

Variable d'entrée

Variable de sortie

Va… dépendantes	x_1	$x_2 \cdots$	x_r		$x_{m+1} \cdots$	$x_s \cdots$	x_n	$-z$	…rmes de droite
x_1	1				$\bar{a}_{1m+1} \cdots$	$\bar{a}_{1s} \cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1			$\bar{a}_{2m+1} \cdots$	$\bar{a}_{2s} \cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_r			1		$\bar{a}_{rm+1} \cdots$	$\bar{a}_{rs} \cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_m				1	$\bar{a}_{mm+1} \cdots$	$\bar{a}_{ms} \cdots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$					$\bar{c}_{m+1} \cdots$	$\bar{c}_s \cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne *r* résultante par $\bar{c}_s$ pour la soustraire de la dernière ligne du tableau. Ceci ramène le coefficient de la variable d'entrée x_s à 0.

Variable d'entrée

Variable de sortie

Va... dépendantes	x_1	$x_2 \cdots$	x_r		x_{m+1}	$\cdots x_s$	$\cdots x_n$	$-z$	Termes de droite
x_1	1				$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots \bar{a}_{1s}$	$\cdots \bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1			$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots \bar{a}_{2s}$	$\cdots \bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_r			1		$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots \bar{a}_{rs}$	$\cdots \bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_m				1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots \bar{a}_{ms}$	$\cdots \bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$					$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots \bar{c}_s$	$\cdots \bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Tableau résultant
pour
amorcer la prochaine itération

Variables dépendantes	$x_1 \quad x_2 \quad \cdots x_r \cdots x_m \quad x_{m+1} \quad \cdots x_s \quad \cdots x_n \quad -z$	Termes de droite
x_1	$1 \qquad \cdots \bar{\tilde{a}}_{1r} \cdots \quad \bar{\tilde{a}}_{1m+1} \cdots 0 \cdots \bar{\tilde{a}}_{1n}$	$\bar{\tilde{b}}_1$
x_2	$1 \quad \cdots \bar{\tilde{a}}_{2r} \cdots \quad \bar{\tilde{a}}_{2m+1} \cdots 0 \cdots \bar{\tilde{a}}_{2n}$	$\bar{\tilde{b}}_2$
$\vdots$	$\ddots \qquad\qquad \ddots \quad \ddots$	$\vdots$
x_s	$\cdots \bar{\tilde{a}}_{rr} \cdots \quad \bar{\tilde{a}}_{rm+1} \cdots 1 \cdots \bar{\tilde{a}}_{rn}$	$\bar{\tilde{b}}_r$
$\vdots$	$\ddots \qquad\qquad \ddots \quad \ddots$	$\vdots$
x_m	$\cdots \bar{\tilde{a}}_{mr} \cdots 1 \quad \bar{\tilde{a}}_{mm+1} \cdots 0 \cdots \bar{\tilde{a}}_{mn}$	$\bar{\tilde{b}}_m$
$-z$	$\cdots \bar{\tilde{c}}_r \cdots \quad \bar{\tilde{c}}_{m+1} \cdots 0 \cdots \bar{\tilde{c}}_n \qquad 1$	$-\bar{\tilde{z}}$

Méthode du simplexe – notation matricielle

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$c^{\mathrm{T}} = [c_1, \dots, c_n] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Le problème de programmation linéaire sous la forme standard

$$\begin{array}{rl} \min & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ \text{Sujet à} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & . \quad . \quad . \quad . \\ & . \quad . \quad . \quad . \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\ & x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \min & z = c^{\mathrm{T}} x \\ \text{Sujet à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$c, x \in R^n, b \in R^m$$

$$A \text{ matrice } m \times n$$

Problem du restaurateur

$$\min \quad z = [-8, -6, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ p \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min z &= -8x - 6y \\ \text{Suject to } \; 5x + 3y + u \qquad &= 30 \\ 2x + 3y \qquad + p \qquad &= 24 \\ 1x + 3y \qquad\qquad + h &= 18 \\ x, y, u, p, h &\geq 0 \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ p \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$x, y, u, p, h \geq 0$$

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$c^{\mathrm{T}} = [c_1, \ldots, c_n] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{Sujet à} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ & \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0 \\ & x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|lrl|} \hline \min & z & \\ \text{Sujet à} & Ax & = b \\ & c^{\mathrm{T}}x - z & = 0 \\ & x & \geq 0 \\ \hline \multicolumn{3}{|l|}{c, x \in R^n, b \in R^m} \\ \multicolumn{3}{|l|}{A \text{ matrice } m \times n} \\ \hline \end{array}$$

Méthode du simplexe – notation matricielle

- Considérons le problème de programmation linéaire sous sa forme matricielle

$$\begin{aligned} \min\ & z \\ \text{Sujet à}\quad & Ax \quad = b \\ & c^{\mathrm{T}} x - z = 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Supposons que $m \leq n$ et que la matrice A est de plein rang (i.e., rang(A) = m, ou que les lignes de A sont linéairement indépendantes)
- Une sous matrice B de A est une base de A si elle est mxm et non singulière (i.e, B^{-1} existe)

Problème du restaurateur:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x & y & u & p & h \end{array} \\
A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exemples de base:

$$
B_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & p & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
B_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & p & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
B_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & p & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Méthode du simplexe – notation matricielle

- Une sous matrice B de A est une base de A si elle est mxm et non singulière (i.e, B^{-1} existe)
- Pour faciliter la présentation, supposons que la base B que nous considérons est composée des m premières colonnes de A, et ainsi

$$A = [B \vdots R]$$

Dénotons également

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_R \end{bmatrix}$$

- Le problème original peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{Sujet à} \quad Ax \qquad = b \\
&\qquad\qquad c^{\mathrm{T}}x - z = 0 \\
&\qquad\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{Sujet à} \quad \left[B \vdots R\right]\begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \qquad = b \\
&\qquad\qquad \left[c_B^{\mathrm{T}} \vdots c_R^{\mathrm{T}}\right]\begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\
&\qquad\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{Sujet à} \quad Bx_B + Rx_R \qquad = b \\
&\qquad c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\
&\qquad x_B, x_R \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{Sujet à} \quad \left[B \,\vdots\, R \right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \qquad = b \\
&\qquad \left[c_B^{\mathrm{T}} \,\vdots\, c_R^{\mathrm{T}} \right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Exprimons x_B en fonction de x_R en utilisant les contraintes du problème

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

- Ainsi

$$Ix_B = -B^{-1}Rx_R + B^{-1}b$$

En remplaçant x_B par sa valeur
en fonction de x_R dans l'équation
de la fonction économique

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{Sujet à} \quad & Bx_B + Rx_R = b \\ & c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

Notons que ces deux problèmes sont équivalents car le deuxième est obtenu du premier à l'aide d'opérations élémentaires utilisant une matrice non singulière B^{-1}

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{Sujet à} \quad & Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \\ & c_B^{\mathrm{T}}(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min \quad z$$

$$\text{Sujet à} \qquad Ix_B + B^{-1}Rx_R \qquad\qquad = B^{-1}b$$

$$c_B^{\mathrm{T}}(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^{\mathrm{T}}x_R - z = 0$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad c_B^{\mathrm{T}} \quad \end{bmatrix}}_{m} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \quad B^{-1} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{m} \left.\begin{bmatrix} \\ b \\ \\ \end{bmatrix}\right\} m$$

En regroupant les coefficients de x_R

$$\min \quad z$$

$$\text{Sujet à} \qquad Ix_B + B^{-1}Rx_R \qquad\qquad = \ B^{-1}b$$

$$0x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}R)x_R - z = -c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

$$\min \quad z$$

$$\text{Sujet à} \qquad \begin{aligned} Ix_B + B^{-1}Rx_R & \qquad = B^{-1}b \\ 0x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}R)x_R - z & = -c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b \\ x_B, x_R \geq 0 & \end{aligned}$$

Le problème se traduit dans le tableau suivant

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	1	$-c_B^T B^{-1}b$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad\quad . \\
\quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \qquad\quad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

$B^{-1} \times$

x_B^{T}	x_R^{T}	$-z$	r.h.s.
B	R	0	b
c_B^{T}	c_R^{T}	1	0

$$
\begin{array}{l}
x_1 + \qquad + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1s}x_s + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\
\quad x_2 + \qquad + \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2s}x_s + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\
\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
\qquad x_r + \quad + \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{rs}x_s + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\
\quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
\qquad\quad x_m + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{ms}x_s + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m \\
\qquad\qquad \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_s x_s + \ldots + \bar{c}_n x_n = z - \bar{z}
\end{array}
$$

basic var.	x_B^T	x_R^T	$-z$	r.h.s.
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	1	$-c_B^T B^{-1}b$

Méthode du simplexe – notation matricielle

- Une sous matrice B de A est une base de A si elle est mxm et non singulière (i.e, B^{-1} existe)
- Pour faciliter la présentation, supposons que la base B que nous considérons est composée des m premières colonnes de A, et ainsi

$$A = \left[B \vdots R \right]$$

Dénotons également

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_R \end{bmatrix}$$

- Le problème original peut s'écrire

Considérons la base à la deuxième itération du problème du restaurateur:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & p & h & y & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} \qquad x_R = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_R = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{Sujet à} \quad B x_B + R x_R \qquad = b \\
&\qquad\qquad c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\
&\qquad\qquad x_B, x_R \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{Sujet à} \quad \left[B \,\vdots\, R\right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \qquad = b \\
&\qquad\qquad \left[c_B^{\mathrm{T}} \,\vdots\, c_R^{\mathrm{T}}\right] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\
&\qquad\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\min z$$

Sujet à

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenons B^{-1} avec la méthode d'élimination de Gauss:

$$B = \begin{pmatrix} \color{red}{5} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

- Exprimons x_B en fonction de x_R en utilisant les contraintes du problème

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

- Ainsi

$$Ix_B = -B^{-1}Rx_R + B^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$I \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$I\begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$I\begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\min \quad z \\ &\text{Sujet à} \quad Bx_B + Rx_R \qquad = b \\ &\qquad\qquad c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\ &\qquad\qquad x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

En remplaçant x_B par sa valeur en fonction de x_R dans l'équation de la fonction économique

Notons que ces deux problèmes sont équivalents car le deuxième est obtenu du premier à l'aide d'opérations élémentaires utilisant une matrice non singulière B^{-1}

$$\begin{aligned} &\min \quad z \\ &\text{Sujet à} \qquad Ix_B + B^{-1}Rx_R \qquad = B^{-1}b \\ &\qquad c_B^{\mathrm{T}}(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^{\mathrm{T}} x_R - z = 0 \\ &\qquad x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min \quad z$$

$$\text{Sujet à} \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$c_B^{\mathrm{T}}(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^{\mathrm{T}}x_R - z = 0$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

En regroupant les coefficients de x_R

$$\min \quad z$$

$$\text{Sujet à} \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$0x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}R)x_R - z = -c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

$$0x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R) x_R - z = -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b$$

$$c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = -48$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ p\\ h\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}-6 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ -\frac{2}{5} & 1 & 0\\ -\frac{1}{5} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}y\\ u\end{bmatrix}-z=48$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ p\\ h\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}-6 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5}\\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5}\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}y\\ u\end{bmatrix}-z=48$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\p\\h\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}-6 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5}\\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5}\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}-z=48$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\p\\h\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}-6 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{24}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}-z=48$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\p\\h\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{6}{5} & \frac{8}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}-z=48$$

$$\min \quad z$$

$$\text{Sujet à} \qquad \begin{aligned} I x_B + B^{-1} R x_R \qquad\qquad &= B^{-1} b \\ 0 x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R) x_R - z &= -c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b \\ x_B, x_R \geq 0 & \end{aligned}$$

Le problème se traduit dans le tableau suivant

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1} R$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

$$
I\begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}
$$

	x	p	h	y	u	$-z$	
x	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
p	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	12
h	0	0	1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	12

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

	x	p	h	y	u	$-z$	
x	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
p	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	12
h	0	0	1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	12

	x	y	u	p	h	$-z$	
x	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	6
p	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	12
h	0	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	12
$-z$	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	1	48

	x	p	h	y	u	$-z$	
x	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
p	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	12
h	0	0	1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	12
$-z$	0	0	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	1	48

B^{-1}

Var. dep.	x	y	u	p	h	- z	termes droite
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
-z	-8	-6				1	0

Exprimons x_B en fonction de x_R en utilisant les contraintes du problème

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

En fait ceci revient à faire

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b.$$

Or si la matrice A comporte une sous matrice qui est égal

à la matrice identité I; i.e.,

$$A = \left[\tilde{A} \vdots I\right]$$

alors
$$B^{-1}Ax = B^{-1}\left[\tilde{A} \vdots I\right]x$$
$$= \left[B^{-1}\tilde{A} \vdots B^{-1}\right]x.$$

Ainsi, dans le tableau associé à la base B, nous retrouvons l'inverse de la base B^{-1} sous les variables associées à la matrice identité I dans le tableau original.

$\boxed{B^{-1}}$

	x	y	u	p	h	$-z$	
u	5	3	1	0	0	0	30
p	2	3	0	1	0	0	24
h	1	3	0	0	1	0	18
$-z$	-8	-6	0	0	0	1	0

	x	y	u	p	h	$-z$	
x	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	6
p	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	12
h	0	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	12
$-z$	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	1	48

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1} R$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

Les variables de x_B (dénotées jusqu'ici variables dépendantes) qui sont associées aux colonnes de la base *B*, sont dénotées variables de base

Les variables de x_R (dénotées jusqu'ici variables indépendantes) sont dénotées variables hors base

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1} R$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

Pour obtenir la solution de base associée à la base *B*,

posons $x_R = 0$

et alors $x_B = B^{-1}b$.

La solution de base est réalisable si $x_B \geq 0$

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1} R$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

Notons que ce tableau est identique à celui utilisé pour illustrer
une itération du simplexe

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1} R$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

Puisque tout tableau du simplexe est associé à une base de A constituée des colonnes associées aux variables de base (variables dépendantes), il s'ensuit que dans l'algorithme du simplexe, nous passons d'une solution de base réalisable à une nouvelle solution de base réalisable ayant une valeur plus petite

Critère d'optimalité

- ***Proposition*** Dans l'algorithme du simplexe, si à une itération les coûts relatifs $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j,\ 1 \leq j \leq n$, alors la solution courante est optimale

***Preuve*:** Sans perte de généralité, supposons que les *m* premières variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont les variables de base; i. e.,

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots x_r \cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots x_s$	$\cdots x_n$	$-z$	Termes de droite
x_1	1				$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots \bar{a}_{1s}$	$\cdots \bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1			$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots \bar{a}_{2s}$	$\cdots \bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_r			1		$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots \bar{a}_{rs}$	$\cdots \bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$			$\ddots$			$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
x_m				1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots \bar{a}_{ms}$	$\cdots \bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$					$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots \bar{c}_s$	$\cdots \bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Var. base	x_B^T	x_R^T	$-z$	Termes droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1} R$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

$$\bar{x}_i = \bar{b}_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\bar{x}_i = 0 \qquad i = m+1, m+2, \ldots, n$$

$$\bar{z} = c_B B^{-1} b$$

Critère d'optimalité

Variables dépendantes	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$	Termes de droite
x_1	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
x_2		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2s}$	$\cdots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$					$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_r				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rs}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$			$\ddots$		$\ddots$			$\vdots$
x_m						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ms}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_s$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

La fonction économique est de la forme

$$z = 0x_1 + \ldots + 0x_m + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_n x_n + c_B^T B^{-1} b$$

$$\bar{z} = \qquad c_B^T B^{-1} b$$

Critère d'optimalité

La fonction économique est de la forme

$$z = 0x_1 + \ldots + 0x_m + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{c}_n x_n + c_B^T B^{-1} b$$

Considérons une autre solution réalisable $\bar{\bar{x}} \geq 0$ dont la valeur est

$$\bar{\bar{z}} = \bar{c}_{m+1}\bar{\bar{x}}_{m+1} + \bar{c}_{m+2}\bar{\bar{x}}_{m+2} + \ldots + \bar{c}_n \bar{\bar{x}}_n + c_B^T B^{-1} b$$

Mais puisque par hypothèse $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j,\ 1 \leq j \leq n$, il s'ensuit que

$$\bar{\bar{z}} = \underbrace{\bar{c}_{m+1}\bar{\bar{x}}_{m+1} + \bar{c}_{m+2}\bar{\bar{x}}_{m+2} + \ldots + \bar{c}_n \bar{\bar{x}}_n}_{\geq 0} + c_B^T B^{-1} b \geq c_B^T B^{-1} b$$

Donc la solution courante est optimale. $\square$