L2 - Math4
Exercices corrigés sur les suites numériques

1 Enoncés

Exercice 1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner une démonstration de chaque assertion vraie, et donner un contre-exemple de chaque assertion fausse.

(1) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers l'infini.

(2) Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

(3) Si une suite positive tend vers zéro, elle est décroissante.

(4) Si une suite positive tend vers zéro, elle est décroissante à partir d'un certain rang.

(5) Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

(6) Si une suite est croissante et non bornée, elle tend vers l'infini.

Exercice 2 Soient a et b deux réel fixés ; on considère une suite $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Trouver $l \in \mathbb{R}$ pour que $(u_n - l)_n$ soit une suite géométrique. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b la suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

Exercice 3 Etudier la convergence des suites

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{n\sin n}{n^2+1}, \quad \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad n\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}.$$

Exercice 4 Etudier les limites suivantes lorsque $n \to \infty$:

$$n^3 2^{-n}, \quad n^\alpha a^n \ (\alpha \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^\star), \quad \frac{2^n}{n!}, \quad \frac{a^n}{n!}, \quad \frac{n^n}{n!}, \quad n^2 a^{-\sqrt{n}} \ (a \in \mathbb{R}_+^\star), \quad n^\alpha e^{-(\ln n)^2} \ (\alpha > 0).$$

Exercice 5 Le but de cet exercice est l'étude de la suite $(\cos n\alpha)_n$, où α est un réel.

(1) Que peut-on dire si $\sin\alpha = 0$?

(2) On suppose désormais que $\sin\alpha \neq 0$, et on veut montrer que $(\cos n\alpha)_n$ n'a pas de limite. On suppose, en vue d'obtenir une contradiction, que $(\cos n\alpha)_n$ admet une limite l. Montrer, en considérant la suite $(\cos(n+1)\alpha)_n$, qu'alors
$$\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = l\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}.$$

(3) Puis, en considérant $\sin 2n\alpha$, montrer que $l \in \{0, 1/2\}$.

(4) Enfin, en considérant $\cos 2n\alpha$, montrer que $l = 2l^2 - 1$. Conclure.

Exercice 6 Étudier les suites récurrentes suivantes :

(1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

(2) $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

Exercice 7 On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

(1) Montrer que $(u_n)_n$ est strictement croissante, et que $(v_n)_n$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

(2) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite l.

(3) Montrer que cette limite est irrationnelle.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

(1) L'assertion est fausse. Par exemple, la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive, non majorée, et ne tend pas vers l'infini.

(2) L'assertion est vraie. Par hypothèse, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \big[n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon\big].$$

Ainsi, pour $\varepsilon = 1/2$, on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \in]l - 1/2, l + 1/2[$. Or, l'intervalle $]l - 1/2, l + 1/2[$ contient au plus un entier de manière évidente. Ceci montre que u_n est nécessairement constante à partir du rang N.

(3) L'assertion est fausse. Par exemple, la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1/n & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive, converge vers 0, mais n'est pas décroissante.

(4) L'assertion est fausse. La suite (u_n) précédente fournit là encore un contre-exemple.

(5) L'assertion est fausse. La suite définie par $u_n = (-1)^n n$ n'est ni majorée ni minorée.

(6) L'assertion est vraie. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle est bornée inférieurement (par u_0). Donc si de plus (u_n) est non bornée, c'est qu'elle est non bornée supérieurement. Ainsi, si l'on fixe $A \in \mathbb{R}$, on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$. Mais comme (u_n) est croissante, $u_n \geq A$ pour tout $n \geq N$. Comme A peut être choisi arbitrairement, on a montré que u_n tend vers l'infini lorsque $n \to \infty$.

Solution de l'exercice 2 Posons $v_n := u_n - l$. Deux cas peuvent se produire :

- La suite $(v_n)_n$ est constante. Dans ce cas, pour toute valeur de $l \in \mathbb{R}$, la suite (v_n) est géométrique. Il est clair que (v_n) est constante si et seulement si (u_n) est constante. Or (u_n) est constante si et seulement si

$$\big[a = 1 \text{ et } b = 0\big], \quad \text{ou} \quad \big[a \neq 1 \text{ et } b = u_0(1 - a)\big],$$

c'est-à-dire, si et seulement si $b = u_0(1 - a)$.

- La suite $(v_n)_n$ est non constante. Pour que la suite (v_n) soit géométrique de raison q, il faut que

$$au_n + b - l = u_{n+1} - l = q(u_n - l) = qu_n - ql$$

pour tout n, avec bien sûr $q \neq 1$ (sans quoi $(v_n)_n$ serait constante). La suite $(u_n)_n$ n'étant pas constante, on doit avoir, d'après l'égalité ci-dessus, $q = a$. On en déduit que

$$b - l = -al, \quad \text{soit} \quad l = \frac{b}{1 - a}.$$

Notons que, d'après ce qui précède, $(v_n)_n$ est non constante si et seulement si $b \neq u_0(1 - a)$, En résumé, deux cas se produisent :

(i) soit $b = u_0(1-a)$, c'est-à-dire, $(u_n)_n$ est constante, et alors $(u_n - l)_n$ est géométrique quel que soit $l \in \mathbb{R}$;

(ii) soit $b \neq u_0(1-a)$, et alors $(u_n - l)_n$ est géométrique si et seulement si $a \neq 1$ et $l = b/(1-a)$.

Dans le cas (i), (u_n) est évidemment convergente. Dans le cas (ii), soit $a = 1$ et alors $b \neq 0$, de sorte que la suite (u_n) est clairement divergente, soit $a \neq 1$ et alors la suite $(u_n - b/(1-a))_n$ est géométrique de raison a, qui ne peut être convergente que si $|a| < 1$.
En résumé, la suite (u_n) est convergente si et seulement si

$$b = u_0(1-a) \quad \text{ou bien} \quad \big[\, |a| < 1 \text{ et } b \text{ est quelconque dans } \mathbb{R}\big].$$

Solution de l'exercice 3

- Posons $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$. On a :

$$\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \sim n, \quad \text{donc} \quad u_n \sim n - \sqrt{n},$$

  de sorte que $u_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
- On a :

$$\left|\frac{n \sin n}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{donc} \quad v_n := \frac{n \sin n}{n^2+1} \longrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ n \to \infty.$$

- La suite $w_n := n^{-1} + (-1)^n$ est divergente. En effet, si w_n était convergente vers une limite l, toute suite extraite serait aussi convergente, vers la même limite. Or,

$$w_{2k} = \frac{1}{2k} + 1 \longrightarrow 1 \ \text{ lorsque } \ k \to \infty, \quad \text{et} \quad w_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} - 1 \longrightarrow -1 \ \text{ lorsque } \ k \to \infty.$$

- Les termes de la somme

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+2n+1}$$

  sont évidemment rangés en ordre décroissant, de sorte que la somme est majorée par $(2n+1)$ fois le premier terme et minorée par $(2n+1)$ fois le dernier terme. On remarque que le dernier terme est égal à $(n+1)^{-2}$. Ainsi,

$$\frac{n(2n+1)}{n^2+1} \geq n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}.$$

  Il est facile de voir que, dans les inégalités ci-dessus, les extrêmes tendent tous deux vers 2. Le théorème des gendarmes implique alors que

$$x_n := n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \longrightarrow 2 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

- Puisque $1/\sqrt{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, $\cos(1/\sqrt{n}) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\cos(1/\sqrt{n}) \geq 1 - \varepsilon$. La fonction cos étant croissante sur $[0,1]$, on a alors, toujours pour $n \geq N$,

$$1 - \varepsilon \leq \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \ldots \leq \cos\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \leq 1.$$

  On en déduit que, pour $n \geq N$,

$$n(1-\varepsilon) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq n, \quad \text{soit} \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq 1.$$

  Comme ε put être choisi arbitrairement petit, on a montré que

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Solution de l'exercice 4

- On a : $\ln(n^3 2^{-n}) = 3\ln n - n\ln 2 \to -\infty$, donc
$$n^3 2^{-n} = e^{\ln(n^3 2^{-n})} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$
- On a : $\ln(n^\alpha a^n) = \alpha \ln n + n \ln a$. On distingue alors 3 cas.
  - Si $a = 1$, alors, pour $\alpha = 0$, $n^\alpha a^n \equiv 1$, pour $\alpha > 0$, $\ln(n^\alpha a^n) \to \infty$, de sorte que $n^\alpha a^n \to \infty$, et pour $\alpha < 0$, $\ln(n^\alpha a^n) \to -\infty$, de sorte que $n^\alpha a^n \to 0$.
  - Si $a > 1$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(n^\alpha a^n) \to \infty$, de sorte que $n^\alpha a^n \to \infty$.
  - Si $a \in]0, 1[$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ln(n^\alpha a^n) \to -\infty$, de sorte que $n^\alpha a^n \to 0$.
- On a :
$$\ln\left(\frac{2^n}{n!}\right) = n\ln 2 - \big(\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n\big) = \ln 2 + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 2 - \ln n).$$
Dans le membre de droite, les termes entre parenthèses forment une suite négative, décroissante, qui tend vers $-\infty$. Ceci montre que
$$\ln\left(\frac{2^n}{n!}\right) \longrightarrow -\infty, \quad \text{donc} \quad \frac{2^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$
- On distingue 3 cas.
  - Si $a = 0$, la suite est identiquement nulle.
  - Si $a > 0$, on écrit comme précédemment :
  $$\ln\left(\frac{a^n}{n!}\right) = \ln a + (\ln a - \ln 2) + \cdots + (\ln a - \ln n).$$
  À partir d'un rang k, les termes entre parenthèses deviennent négatifs. On peut donc écrire
  $$\ln\left(\frac{a^n}{n!}\right) = C + (\ln a - \ln k) + \cdots + (\ln a - \ln n),$$
  ce qui montre comme dans le cas précédent ($a = 2$) que
  $$\ln\left(\frac{a^n}{n!}\right) \longrightarrow -\infty, \quad \text{donc} \quad \frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$
  - Si $a < 0$, on écrit
  $$\frac{a^n}{n!} = (-1)^n \frac{|a|^n}{n!},$$
  et le cas $a > 0$ montre que la suite converge encore vers 0.
- On a :
$$\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = n\ln n - \big(\ln 1 + \cdots + \ln n\big) = (\ln n - \ln 1) + \cdots + (\ln n - \ln n).$$
Dans le membre de droite, tous les termes sont positifs, et le premier d'entre eux tend vers l'infini. Ceci montre que
$$\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \longrightarrow \infty, \quad \text{donc} \quad \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$
- On a : $\ln\left(n^2 a^{-\sqrt{n}}\right) = 2\ln n - \sqrt{n}\ln a$. Ainsi, si $a \in]0, 1]$, $\ln\left(n^2 a^{-\sqrt{n}}\right) \to \infty$, de sorte que $n^2 a^{-\sqrt{n}} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$; et si $a > 1$, $\ln\left(n^2 a^{-\sqrt{n}}\right) \to -\infty$, de sorte que $n^2 a^{-\sqrt{n}} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
- On a : $\ln\left(n^\alpha e^{-(\ln n)^2}\right) = \alpha \ln n - (\ln n)^2 \to -\infty$, donc $n^\alpha e^{-(\ln n)^2} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Solution de l'exercice 5

(1) La condition $\sin\alpha = 0$ équivaut à la condition $\alpha = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, qui est elle-même équivalente à $\cos n\alpha = \cos nk\pi = (-1)^{nk}$. Si k est pair, $\cos nk\pi \equiv 1$ et la suite est convergente puisque constante. Si k est impair, $\cos nk\pi = (-1)^n$ et la suite est divergente.

(2) En passant à la limite dans la formule $\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha$, on obtient :

$$\sin\alpha \lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = l\cos\alpha - l \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = l\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}.$$

(3) D'après la formule $\sin 2a = 2\sin a \cos a$, on a : $\sin 2n\alpha = 2\sin n\alpha \cos n\alpha$. En passant à la limite dans cette dernière formule, on obtient :

$$l\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} = 2l^2\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}.$$

Puisque $\sin\alpha \neq 0$, la fraction apparaissant dans l'équation ci-dessus est non nulle, et l'on peut donc simplifier et obtenir l'équation $l = 2l^2$, c'est-à-dire $l(1-2l) = 0$, ce qui donne $l \in \{0, 1/2\}$.

(4) D'après la formule $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on a : $\cos 2n\alpha = 2\cos^2 n\alpha - 1$. En passant à la limite dans cette dernière formule, on obtient : $l = 2l^2 - 1$, soit $2l^2 - l - 1 = 0$. Les solutions de cette équation du second degré sont 1 et $-1/2$. En conclusion,

$$l \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{1, -\frac{1}{2}\right\} = \emptyset,$$

et on en déduit que la suite $(\cos n\alpha)_n$ n'admet pas de limite.

Solution de l'exercice 6

(1) Posons $f(x) = \sqrt{x+2}$. Il est clair que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. De plus,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}, \quad \text{ce qui montre que} \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Donc f est α-lipschitzienne avec $\alpha = (2\sqrt{2})^{-1} < 1$. Donc f est strictement contractante sur $\mathbb{R}_+$, et l'on peut appliquer le théorème du point fixe : f admet un unique point fixe $\bar{x}$, qui est aussi la limite de u_n :

$$\bar{x} = f(\bar{x}) = \sqrt{\bar{x}+2} \implies \bar{x}^2 - \bar{x} - 2 = 0 \implies \bar{x} \in \{2, -1\},$$

et comme $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$, on trouve que $\bar{x} = 2$. Donc $u_n \to 2$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Posons $f(x) = x - x^2 = x(1-x)$. Plusieurs cas se présentent selon la valeur de u_0.

- Supposons que $u_0 \in \{0, 1\}$. Alors $u_k = 0$ pour tout $k \geq 1$.
- Supposons que $u_0 \in]0,1[$. Alors $u_1 \in]0, 1/2[$ et donc, par induction, $u_k \in]0, 1/2[$ pour tout $k \geq 1$. Or, sur l'intervalle $]0, 1/2[$, on a : $0 < f(x) < x$, ce qui montre (inductivement) que $(u_k)_k$ est strictement décroissante. Comme $(u_k)_k$ est minorée par 0, elle est convergente. Soit l sa limite. En passant à la limite dans l'équation $u_{k+1} = u_k - u_k^2$, on obtient : $l^2 = 0$, donc $l = 0$.
- Supposons que $u_0 < 0$. Comme précemment, la relation $u_{k+1} = u_k - u_k^2$ montre (inductivement) que $(u_k)_k$ est strictement décroissante. Donc soit $(u_k)_k \to -\infty$, soit $(u_k)_k$ est minorée et tend vers une limite finie. Mais on a vu précédemment que si $u_k \to l$ lorsque $k \to \infty$, alors nécessairement $l = 0$, ce qui est impossible ici puisque $u_0 < 0$ et $(u_k)_k$ décroît.
- Supposons que $u_0 > 1$. Alors $u_1 < 0$, et l'on retombe dans le cas précédent.

Solution de l'exercice 7

(1) Rappelons que, par convention, $0! = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$, donc (u_n) est strictement croissante. Par ailleurs,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}.$$

On voit donc que $v_{n+1} - v_n < 0$ à partir de $n = 2$.

(2) Pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq v_n \leq v_2 = 3$ de sorte que (u_n) est une suite croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite l. De même, pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq u_n \geq u_0$ de sorte que la suite (v_n) est décroissante (à partir du rang $n = 2$) et minorée, donc convergente. Or $v_n - u_n = 1/(n!) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc (v_n) converge vers la même limite l.

(3) Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que $l \in \mathbb{Q}$. Alors $l = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$. Pour $n \geq 2$, nous avons $u_n \leq l \leq v_n$, et comme $q \geq 2$ (sans quoi la limite l serait entière, ce qui est clairement faux), nous avons en particulier

$$u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q, \quad \text{soit} \quad q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!v_q = q!u_q + 1.$$

Il est facile de voir que $q!u_q$ est entier. L'entier $q!l = q!(p/q)$ est donc compris entre les deux entiers successifs $q!u_q$ et $q!u_q + 1 = q!v_q$, ce qui montre que $l \in \{u_q, v_q\}$. Si $l = u_q$, alors

$$u_q < u_{q+1} < \cdots < l = u_q,$$

ce qui est absurde. Si $l = v_q$, alors

$$l = v_q > v_{q+1} > \cdots > l,$$

ce qui est tout aussi absurde. Ainsi, nous avons montré que l ne peut pas être rationnel.