Cinématique et dynamique: exercices

Exercice 1

A la surface de la Terre, on peut considérer que l'accélération d'un objet en chute libre est constante et qu'elle vaut 10 m/s^2.

a) Construisez un modèle donnant la vitesse et la position d'un objet en chute libre à la surface de la Terre en fonction du temps.

b) Indiquez les dimensions de chaque élément de votre modèle.

c) Donnez l'horaire du mobile.

Exercice 2

Vous lâchez une bille de rayon r et de masse m d'une hauteur h. Lors de la chute, la bille subit une force de frottement donnée par:

$$F_{\text{frott}} = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$$

où ρ est la masse volumique du milieu, S la section apparente de l'objet, C_x son coefficient de forme (sans dimension) et v la norme de la vitesse de chute.

a) Indiquez sur un schéma les forces qui agissent sur la bille.

b) Peut-on, dans ce cas, donner l'horaire du mobile ?

c) Construisez un modèle permettant d'obtenir l'accélération de l'objet, sa vitesse et sa position en fonction du temps. Etablissez un graphique pour chacune de ces grandeurs.

d) Précisez les dimensions de chaque élément de votre modèle.

e) Comparez les résultats obtenus sous c) à ceux correspondant à une chute sans frottement (en établissant un graphique pour chacune des grandeurs dans le cas où la bille ne subit pas de frottement).

f) Que valent les temps de chute dans chaque cas ? (réponses au 100^e de seconde, s.v.p.)

Données numériques	Quelques valeurs du C_x
masse de la bille m = 50 g	sphère: 0.24
rayon de la bille r = 1 cm	demi-sphère avec convexité à l'avant: 1.12
hauteur de chute h = 200 m	demi-sphère avec convexité à l'arrière: 0.34
masse volumique de l'air ρ = 1.293 kg/m^3	forme de goutte: 0.04
coefficient de forme de la bille C_x = 0.24	disque plat: 1.32

Indication: l'accélération de l'objet est égale à la somme des forces qui agissent sur l'objet divisée par la masse de l'objet.

Exercice 3

En dynamique, on définit la quantité de mouvement d'un mobile $\vec{p}$ comme étant le produit de sa masse m par sa vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

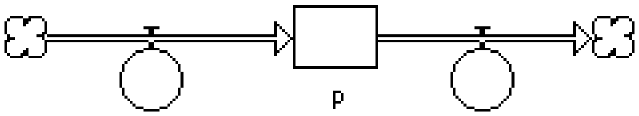
Lorsqu'une force agit pendant un certain temps sur un mobile, elle provoque une variation de la quantité de mouvement de ce dernier:

$$\vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{p}$$

Ce qui peut s'écrire:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

On donne le diagramme suivant dans lequel le réservoir représente la quantité de mouvement d'un mobile se déplaçant en ligne droite.



a) Que représentent les flux dans ce diagramme.
b) Complétez le modèle de façon à obtenir la vitesse de chute d'une bille de rayon r et de masse m tombant d'une hauteur h et subissant une force de frottement donnée par:

$$F_{\text{frott}} = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$$

c) Indiquez les dimensions et les unités des éléments de votre modèle.
d) Comparez les résultats à ceux obtenus à l'aide du modèle de l'exercice 2.

<u>Données numériques</u>
Voir exercice 2.

Exercice 4

Vous tirez un projectile à la vitesse v_0 sous un angle α. Construisez un modèle permettant d'obtenir la trajectoire du projectile:
a) dans le vide
b) dans un fluide de masse volumique ρ.

Indication: il faut exprimer l'accélération du projectile en composantes selon un système d'axes Oxy.

Exercice 5

Un parachutiste de masse m saute d'une hauteur x. Il ouvre son parachute lorsqu'il se trouve à $x_{ouverture}$ mètres du sol. La section apparente du parachutiste et son coefficient de forme valent respectivementS_{min} et C_{min} lorsque le parachute est fermé, S_{max} et C_{max} lorsqu'il est ouvert. Le parachute se déploie en un temps égal à la durée d'ouverture.

a) Construisez un modèle permettant d'obtenir l'accélération, la vitesse et la position du parachutiste en fonction du temps. Etablissez un graphique pour chacune de ces grandeurs.

b) A quelle vitesse le parachutiste touche-t-il le sol ?

c) A quelle altitude doit-il ouvrir son parachute s'il veut toucher le sol à cette vitesse et minimiser son temps de chute ?

Exercice 6

La fusée Saturne V a une masse totale de 2800 tonnes. Sa hauteur vaut 110 mètres et son diamètre 6 mètres. Le premier étage contient 1500 tonnes d'oxygène liquide et 650 tonnes de kérosène. Ses moteurs consomment 15 tonnes de carburant par seconde. Ils produisent une poussée de 35 millions de newtons et propulsent la fusée à 65 km d'altitude en moins de 2 minutes.

a) Etablissez un modèle permettant d'obtenir l'accélération, la vitesse et la position de la fusée Saturne V entre la mise à feu et le moment où le premier étage est largué.

b) Estimez la vitesse d'éjection des gaz durant cette première phase du vol.

Indications: Vous supposerez que le mouvement de la fusée est rectiligne durant cette première phase du vol. Dans un premier temps vous admettrez que l'accélération terrestre et la masse volumique de l'air sont constantes.

Quelques rappels

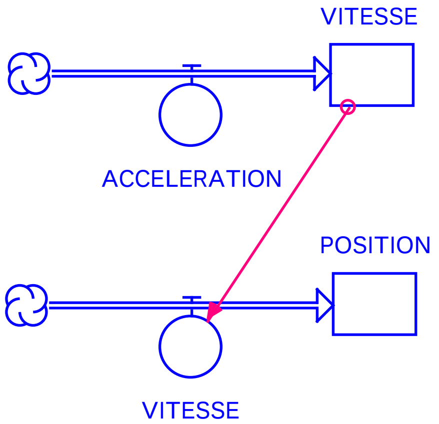
Loi de la dynamique:	*la somme des forces exercées sur la fusée est égale au produit de sa masse par son accélération.*
Force de poussée:	*la force de poussée exercée sur la fusée est égale au produit du débit de masse (gaz éjectés) par le vitesse d'éjection des gaz.*
Force de pesanteur: (poids)	*le poids de la fusée est égal au produit de la masse de la fusée par l'accélération terrestre.*
Force de frottement:	*la force de frottement subie par la fusée fait intervenir la masse volumique de l'air, le coefficient de forme, la section et la vitesse de la fusée.*

Cinématique et dynamique: corrigé

Exercice 1

Pour une chute libre, l'accélération est constante. La vitesse s'obtient en intégrant l'accélération, et la position en intégrant la vitesse:

a) Modèle et équations



POSITION(t) = POSITION(t - dt) + (VITESSE) * dt
INIT POSITION = 0
VITESSE = VITESSE_
VITESSE_(t) = VITESSE_(t - dt) + (ACCELERATION) * dt
INIT VITESSE_ = 0
ACCELERATION = 10

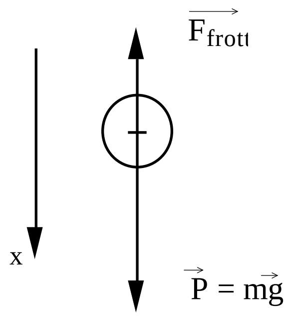
b) Dimensions des éléments du modèle:

POSITION: longueur
VITESSE: longueur/temps
ACCELERATION: longueur/temps^2

c) Horaire du mobile: $at^2/2 + v_0t + x_0$

Exercice 2

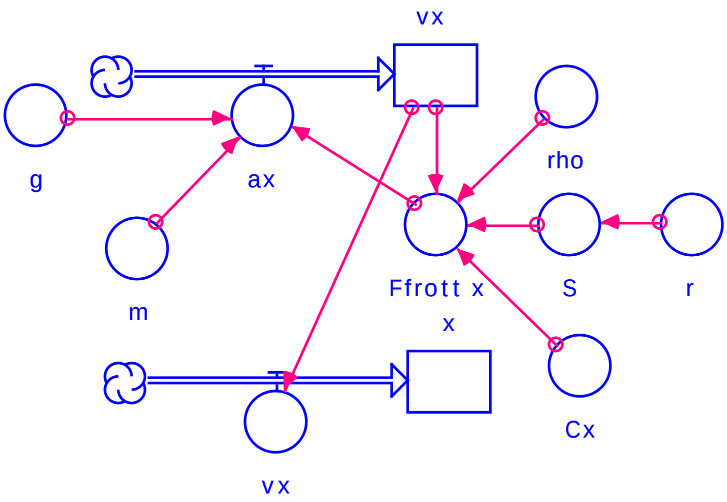
a) La force de frottement dépend de la vitesse et varie donc au cours du temps.



N. B. Les deux forces ne sont égales que lorsque la bille atteint une vitesse de chute stationnaire.

b) On ne peut pas, dans ce cas, donner la position du mobile en fonction du temps.

c) Ici, l'accélération n'est plus constante. En effet, la bille subit, en plus de son poids, une force de frottement variable. Son accélération sera donc égale à l'accélération g plus l'accélération due à la force de frottement. Choisissons un axe Ox et exprimons les différentes grandeurs selon Ox:



vx_(t) = vx_(t - dt) + (ax) * dt
INIT vx_ = 0
ax = g-Ffrott_x/m
x(t) = x(t - dt) + (vx) * dt
INIT x = 0
vx = vx_
Cx = 0.24
Ffrott_x = 0.5*rho*S*Cx*vx_^2
g = 10
m = 0.05
r = 0.01
rho = 1.293
S = PI*r^2

d) Dimensions des éléments du modèle:

ax: longueur/temps^2

Cx: sans dimension

F frott: masse longueur/temps^2

g: longueur/temps^2

m: masse

r: longueur

rho: masse/longueur^3

S: longueur^2

vitesse_x = vx: longueur/temps

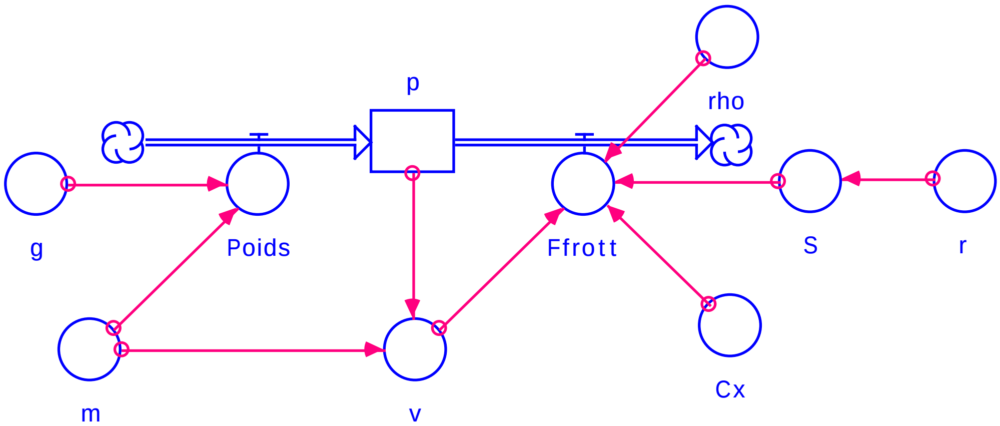
x: longueur

e) et f) à l'aide des modèles.

Exercice 3

a) Les flux représentent des forces. Le flux entrant (poids) provoque une augmentation de la quantité de mouvement *p* alors que le flux sortant (force de frottement) provoque une diminution de *p*.

b)



p(t) = p(t - dt) + (Poids - Ffrott) * dt

INIT p = 0

Poids = m*g

Ffrott = 0.5*rho*S*Cx*v^2

g = 10

m = 0.05

v = p/m

Cx = 0.24

rho = 1.293

S = PI*r^2

r = 0.01

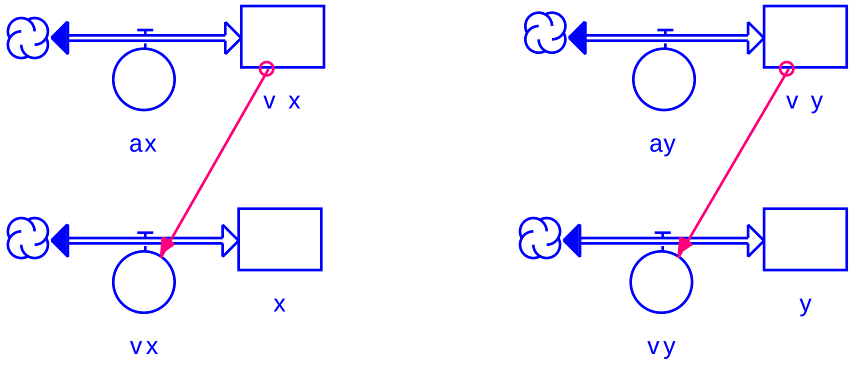
c) Dimensions et unités des éléments du modèle:

Dimensions	Unités
Cx: sans dimension	sans unité
Ffrott: masse longueur/temps^2	kilogramme mètre/seconde^2
g: longueur/temps^2	mètre/seconde^2
m: masse	kilogramme
Poids: masse longueur/temps^2	kilogramme mètre/seconde^2
p: masse longueur/temps	kilogramme mètre/seconde
r: longueur	mètre
rho: masse/longueur^3	kilogramme /mètre^3
S: longueur^2	mètre^2
v: longueur/temps	mètre/seconde

d) Ce modèle fournit des résultats identiques à ceux obtenus à l'aide du modèle de l'exercice 2.

Exercice 4

Si on exprime l'accélération du mobile selon un système d'axes Oxy, on obtient la structure de base suivante:



En intégrant les composantes a_x et a_y de l'accélération du projectile, on obtient les composantes v_x et v_y de sa vitesse. On intègre ensuite v_x et v_y pour obtenir les coordonnées x et y de la position du mobile. N.B. Les flux sont des biflow - les grandeurs qu'ils représentent peuvent être positives ou négatives - ce qui signifie qu'ils peuvent contribuer à remplir ou à vider les réservoirs auxquels ils sont associés. L'accélération du projectile est définie à partir de la force résultante qui agit sur lui et de sa masse:

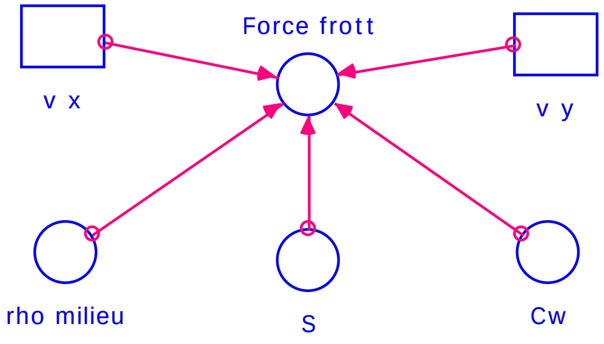
$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = \frac{\overrightarrow{\text{poids}} + \overrightarrow{\text{force de frottement}}}{m}$$

En composantes, on obtient:

$$a_x = \frac{F_{\text{frott x}}}{m} \qquad a_y = g_y + \frac{F_{\text{frott y}}}{m}$$

La grandeur de la force de frottement (qui est toujours opposée au mouvement), s'obtient à partir de:

$$F_{\text{frott}} = \frac{1}{2}\rho S C_w v^2 = \frac{1}{2}\rho S C_w (v_x^2 + v_y^2)$$

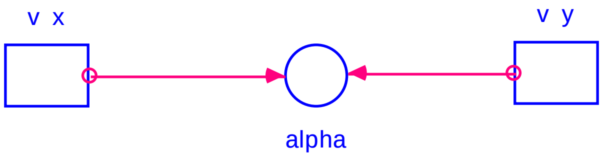


On peut donc écrire, en considérant les grandeurs:

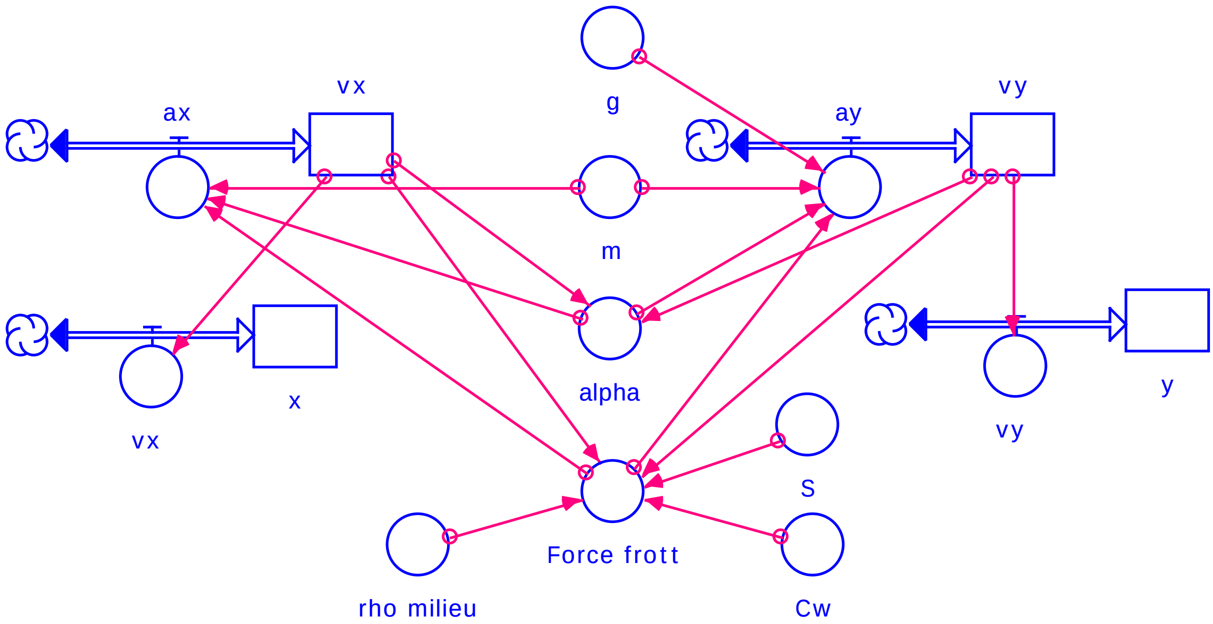
$$a_x = -\frac{F_{\text{frott}}\cos(\alpha)}{m} \qquad a_y = -g - \frac{F_{\text{frott}}\sin(\alpha)}{m}$$

où α est l'angle entre l'axe x et le vecteur vitesse:

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{v_y}{v_x}$$



Le diagramme:



Les paramètres du modèle:

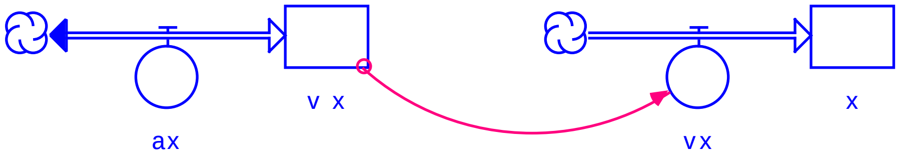
Les valeurs initiales:

Les équations:

vx(t) = vx(t - dt) + (ax) * dt
INIT vx = vitesse_initiale*COS(angle_initial*PI/180)
ax = -Force_frott*COS(alpha)/m
vy(t) = vy(t - dt) + (ay) * dt
INIT vy = vitesse_initiale*SIN(angle_initial*PI/180)
ay = -g-Force_frott*SIN(alpha)/m
x(t) = x(t - dt) + (vx_) * dt
INIT x = 0
vx_ = vx
y(t) = y(t - dt) + (vy_) * dt
INIT y = 0
vy_ = vy
alpha = IF vx <1e-9 THEN IF vy≥0 THEN PI/2 ELSE -PI/2 ELSE ARCTAN(vy/vx)
Lorsque vx tend vers 0, on pose alpha égal à Pi/2 si vy est positive et alpha égal -PI/2 si vy est négative
angle_initial = 70
L’angle initial de tir doit être compris entre -90 et 90º
Cw = 0.24
Coefficient de forme de l'objet
Force_frott = 0.5*rho_milieu*S*Cw*(vx^2+vy^2)
g = 10
m = 1
Masse du projectile en kilogramme
rho_milieu = 1.293
Masse volumique du milieu en kilogramme par mètre cube
S = .3
Section apparente de l'objet en mètre carré
vitesse_initiale = 10

Exercice 5

La structure de base du modèle est la suivante:



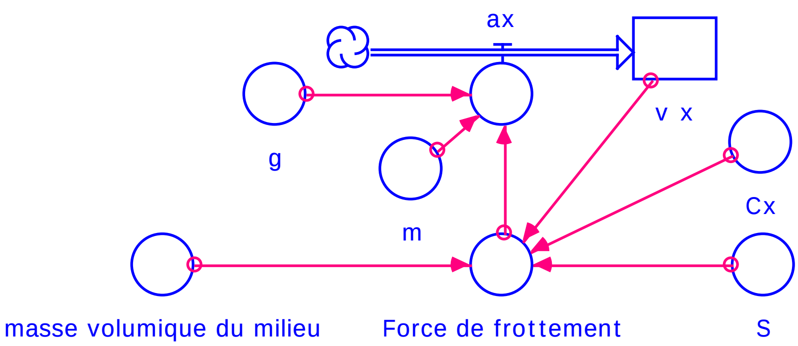
Le premier flux permet d'intégrer l'accélération a_x et d'obtenir la vitesse v_x. Celle-ci est ensuite reportée dans le flux v_x qui réalise une deuxième intégration et fournit la position x. L'accélération est définie à partir de la force résultante qui agit sur le parachutiste et de sa masse. Soit, selon l'axe Ox:

$$a_x = \frac{Poids_x + F_{frott\ x}}{m} = \frac{mg_x + F_{frott\ x}}{m} = g_x + \frac{F_{frott\ x}}{m}$$

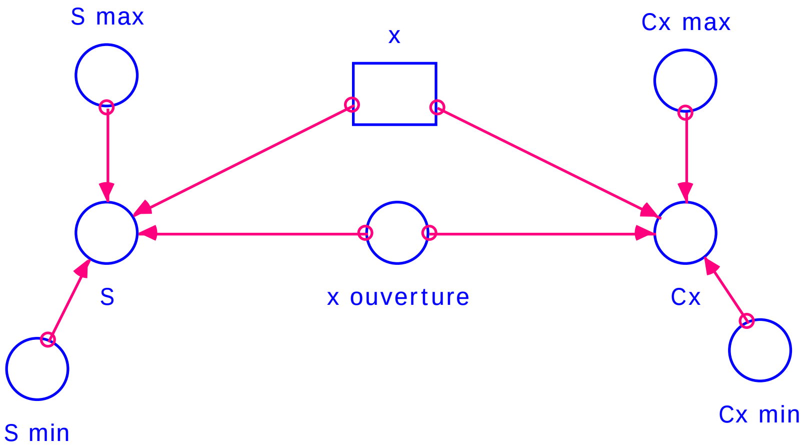
Comme le poids et la force de frottement sont parallèles à Ox, on peut encore écrire:

$$a_x = - g + \frac{F_{frott}}{m}$$

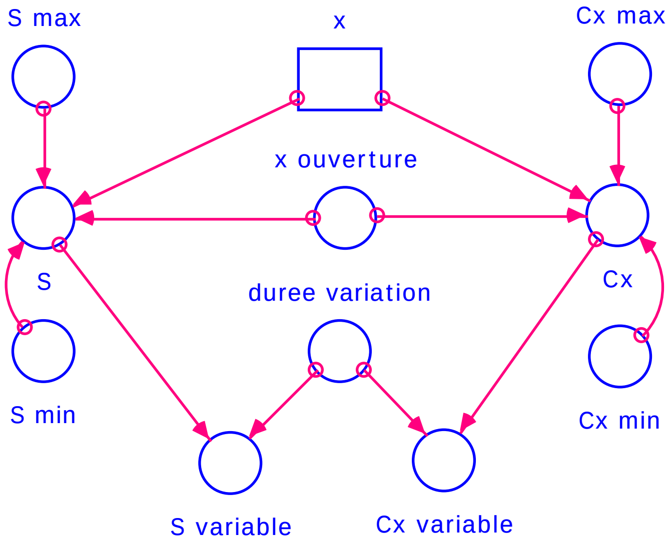
où g est la grandeur de l'accélération terrestre et F_{frott} la norme de la force de frottement. La partie suivante du modèle permet d'obtenir la force de frottement et l'accélération:



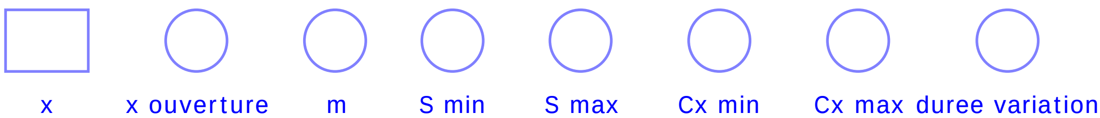
Il faut encore compléter le modèle pour obtenir la variation de la force de frottement - et donc de l'accélération - lors de l'ouverture du parachute. La section apparente S et le coefficient de forme Cx du parachutiste doivent varier entre S_{min} et S_{max}, respectivement entre Cx_{min} et Cx_{max}. Il est possible de réaliser la variation de ces grandeurs après un certain temps à l'aide de la fonction "DELAY", mais il est plus intéressant de pouvoir commander l'ouverture du parachute en fonction de l'altitude. On complète donc le modèle par les éléments suivants:



Si x < $x_{ouverture}$, Cx = Cx_{min} et S = S_{min}, sinon Cx = Cx_{max} et S = S_{max}. Ce type de condition provoque une variation très brusque des grandeurs Cx et S. Pour obtenir une variation correspondant davantage à la situation réelle, on introduit les éléments $Cx_{variable}$ et $S_{variable}$ qui incluent une fonction (SMTH) qui permet de “lisser la variation” et de “l’étaler dans le temps”.

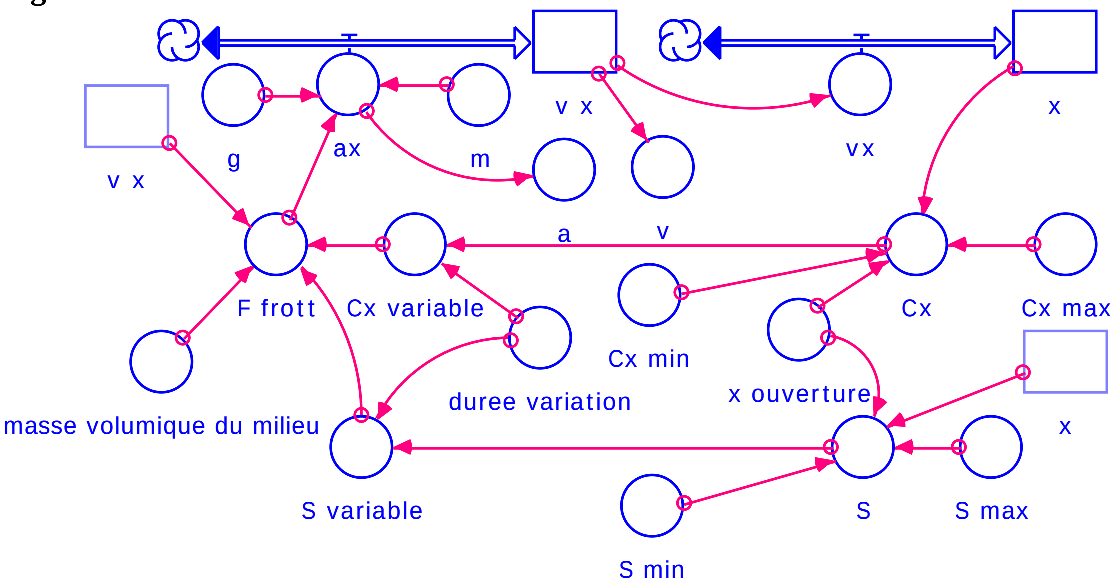


Les paramètres du modèle



Pour conduire une simulation, il faut donc préciser la hauteur du saut (x), l’altitude à laquelle s’ouvre le parachute, la masse du parachutiste, sa section apparente et son coefficient de forme lorsque le parachute est fermé et lorsqu’il est ouvert, ainsi que la durée de l’ouverture.

Le diagramme



Les équations

v_x(t) = v_x(t - dt) + (ax) * dt

INIT v_x = 0

ax = F_frott/m-g

x(t) = x(t - dt) + (vx) * dt

INIT x = 2000

vx = v_x

a = ABS(ax)

Cx = IF x < x_ouverture THEN Cx_max ELSE Cx_min

Cx_max = 3

Cx_min = 1.5

Cx_variable = SMTH3(Cx,duree_variation)

duree_variation = 4

F_frott = 0.5*masse_volumique_du_milieu*S_variable*Cx_variable*v_x^2

g = 10

m = 80

masse_volumique_du_milieu = 1.293

S = IF x < x_ouverture THEN S_max ELSE S_min

S_max = 25

S_min = 0.25

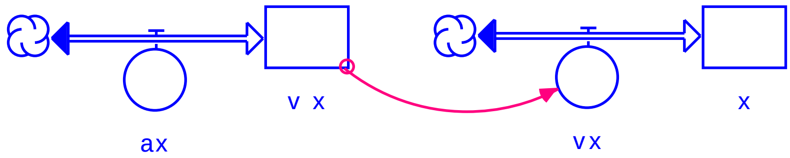
S_variable = SMTH3(S,duree_variation)

v = ABS(v_x)

x_ouverture = 120

Exercice 6

On retrouve dans ce modèle les éléments qui permettent, en intégrant l'accélération puis la vitesse, d'obtenir la position du mobile. On considère ici un mouvement selon l'axe Ox.



Selon la loi fondamentale de la dynamique, l'accélération est égale à la somme des forces qui agissent sur le mobile divisée par sa masse. On a donc, selon l'axe Ox:

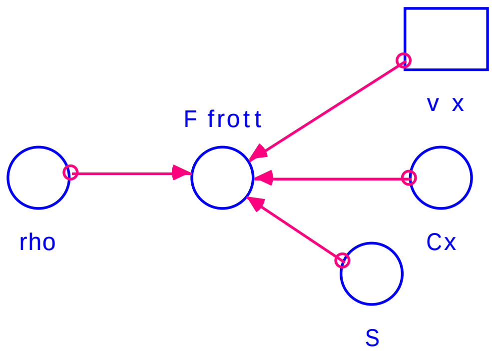
$$a_x = \frac{Poids_x + F_{frott\ x} + F_{poussée\ x}}{m} = \frac{mg_x + F_{frott\ x} + F_{poussée\ x}}{m} = g_x + \frac{F_{frott\ x}}{m} + \frac{F_{poussée\ x}}{m}$$

En utilisant les grandeurs des composantes, il vient:

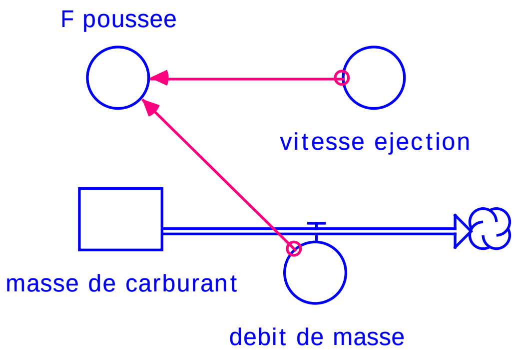
$$a_x = - g - \frac{F_{frott}}{m} + \frac{F_{poussée}}{m}$$

La force de frottement est du type:

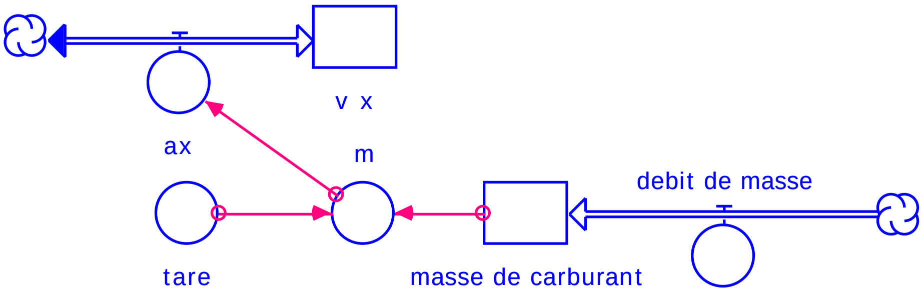
$$F_{frott} = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$$



La force de poussée est égale au produit du débit de masse par la vitesse d'éjection:

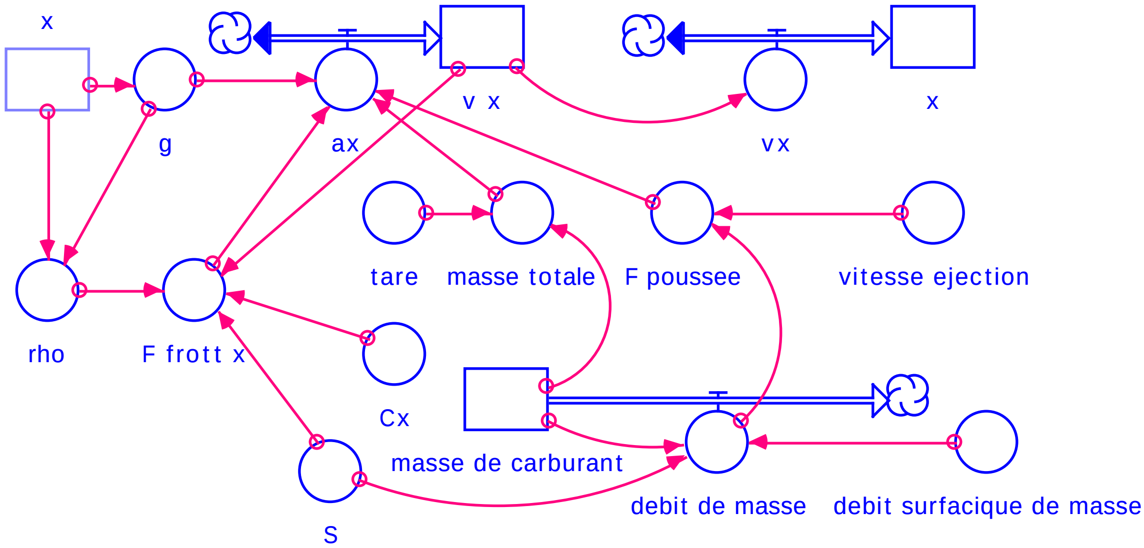


La masse de la fusée n'est pas constante et il faut en tenir compte en définissant accélération:



On peut encore, si on le désire, faire dépendre la masse volumique du milieu (rho) et l'accélération terrestre (g) de l'altitude.

Le diagramme



Les équations

masse_de_carburant(t) = masse_de_carburant(t - dt) - (debit_de_masse) * dt
INIT masse_de_carburant = 2.15e6
debit_de_masse = IF masse_de_carburant>0 THEN S*debit_surfacique_de_masse ELSE 0
v_x(t) = v_x(t - dt) + (ax) * dt
INIT v_x = 1
ax = F_poussee/masse_totale+F_frott_x/masse_totale-g
x(t) = x(t - dt) + (vx) * dt
INIT x = 0
vx = v_x
Cx = 0.2
debit_surfacique_de_masse = 700
F_frott_x = -0.5*rho*S*Cx*v_x^2

F_poussee = debit_de_masse*vitesse_ejection
g = 6.67e-11*6e24/(6.38e6+MAX(x,0))^2
masse_totale = tare+masse_de_carburant
rho = 1.293*EXP(-1.27e-5*g*MAX(x,0))
S = 21
tare = 6.5e5
vitesse_ejection = 2400